

И. Б. Аббасов

МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ
ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ
НА ПОВЕРХНОСТИ МЕЛКОВОДЬЯ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2010

УДК 551.466

ББК 26.222.5

А 13

Аббасов И.Б. **Моделирование нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 128 с. — ISBN 978-5-9221-1254-3.

Рассмотрены вопросы моделирования нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья. Методом последовательных приближений получены решения нелинейного уравнения в двух приближениях. С помощью предложенного графоаналитического способа описана трансформация профиля поверхностных гравитационных волн на этапах заострения гребней, укручения их переднего фронта.

Рассмотрено влияние спектральных составляющих на процесс трансформации профиля волны, описаны причины возникновения асимметрий. На основе полученных аналитических выражений учтены влияния эффектов дисперсии на трансформацию профиля волн. Представлены пространственно-трехмерные модели распространения и рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на различных береговых образованиях.

Для научных работников и специалистов в области моделирования волновой гидродинамики.

Научное издание

АББАСОВ Ифтихар Балакиши оглы

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕЛКОВОДЬЯ

Редактор *О.В. Салецкая*

Оригинал-макет: *Е.В. Осипов*

Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 05.10.2010. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8. Уч.-изд. л. 8,8. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»

121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-1254-3



9

ISBN 978-5-9221-1254-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2010

© И. Б. Аббасов, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	5
Глава 1. Уравнения гидродинамики	6
1.1. Особенности постановки задач математической физики	6
1.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка	7
1.3. Нелинейные уравнения гидродинамики	10
1.4. Методы решения нелинейных уравнений. Метод последовательных приближений	12
1.5. Основные законы гидродинамики идеальной жидкости.	15
1.6. Линейные уравнения гидродинамических волн	18
1.7. Выводы	22
Глава 2. Моделирование волновых явлений на поверхности мелководья	23
2.1. Волны на поверхности моря.	23
2.2. Обзор исследований по поверхностным гравитационным волнам	26
2.3. Исследование поверхностных гравитационных волн	38
2.4. Основные параметры поверхностных гравитационных волн на мелководье	46
2.5. Пространственное моделирование волновых явлений на поверхности мелководья	54
2.6. Натурные наблюдения волновых явлений на поверхности мелководья	62
2.7. Корабельные волны. «Реактивные» утки Александровского сада	62
2.8. Выводы	66
Глава 3. Моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье	68
3.1. Обзор исследований по нелинейным поверхностным гравитационным волнам на мелководье	68
3.2. Нелинейные модели поверхностных гравитационных волн на мелководье	76
3.3. Решение нелинейного уравнения методом последовательных приближений	81
3.4. Моделирование распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье	85
3.5. Моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн	98
3.6. Моделирование распространения и рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье с учетом дисперсии	106
3.7. Выводы	115
Заключение	117
Литература	119

ПРЕДИСЛОВИЕ

С благодарностью моим учителям

Можно бесконечно любоваться закатом на берегу теплого моря под ласкающий шум прибоя. Этот пейзаж существовал миллиарды лет назад, когда еще не было живых существ на планете Земля. Волны первобытного океана прибивались к берегу суши, как и сейчас, в присутствии наблюдающего эту картину человека. Эти волны привлекают внимание художников и исследователей не одно столетие. Несмотря на их красоту и простоту, их не всегда удается так же просто описывать. Причем для проверки правдоподобности построенной модели не обязательно требуются специальные устройства. Достаточно выйти на берег моря, и все станет ясно.

В данной работе делается попытка описания и моделирования некоторых волновых явлений на поверхности водной среды. По своей природе эти волны изначально являются нелинейными, хотя в рамках некоторых приближений их можно считать линейными. Следовательно, наиболее адекватной теорией описания поверхностных волн является нелинейная теория.

В данной книге представлены работы, выполненные автором по исследованию и моделированию нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья. Для наглядности в работе представлены также фотоиллюстрации волновых явлений на поверхности мелководья, выполненные автором.

За постоянное внимание к моим научным поискам хочу поблагодарить своего научного консультанта д.ф.-м.н., профессора Александра Ивановича Сухинова. Его ценные советы часто помогают при обсуждении полученных результатов.

Выражаю благодарность за поддержку в издании данной монографии декану естественно-гуманитарного факультета Технологического института Южного федерального университета в г. Таганроге к.т.н., В.В. Василовскому и заведующему кафедрой инженерной графики и компьютерного дизайна д.т.н., профессору В.Г. Ли.

И. Б. Аббасов

ВВЕДЕНИЕ

*Все той же царице, ... математике,
сияньем которой освещается
невидимая ткань Вселенной.*

В исследованиях экосистем мелководных прибрежных районов Мирового океана немаловажную роль играют физические явления, происходящие на поверхности водной среды. Эти явления, как и любые природные явления, носят сложный, нелинейный характер. Следовательно, это приводит к нелинейным математическим моделям реальных процессов.

Теория волновых движений жидкости является классическим разделом гидродинамики и имеет трехсотлетнюю историю. Интерес к волновым явлениям на поверхности жидкости можно объяснить достаточной распространенностью и доступностью этого физического явления. Несмотря на огромное количество исследований, теория волновых движений жидкости еще остается не завершенной.

В связи с этим актуальным является вопрос исследования и моделирования волновых явлений на поверхности мелководных акваторий и влияния поверхностных гравитационных волн на береговые образования. Поэтому вопрос трехмерного моделирования распространения и рефракции нелинейных поверхностных волн может играть немаловажную роль для целей мониторинга и прогнозирования устойчивого развития экосистем этих районов. В нашем случае в качестве модели будут использоваться гидрологические условия Таганрогского залива Азовского моря.

В данной работе представлены результаты исследований по динамике поверхностных гравитационных волн на мелководье, проведенных автором в течение десяти лет. Для описания и моделирования этих явлений были использованы соответствующие уравнения математической физики и методы математического моделирования.

Глава 1

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

1.1. Особенности постановки задач математической физики

При изучении физического процесса исследователю необходимо описать его в математических терминах. Математическое описание или моделирование процесса может быть достаточно разнообразным. При математическом моделировании исследуется не сам реальный физический процесс, а некоторая его модель — идеальный процесс, записанный в форме математических соотношений. Математическая модель должна сохранять основные черты реального физического процесса и в то же время должна быть достаточно простой для решения известными методами. В дальнейшем соответствие математической модели реальному процессу необходимо проверять экспериментальным путем.

Многие способы математического описания физических процессов приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными, а в некоторых случаях к интегро-дифференциальным уравнениям. Именно этой группе задач присваивают термин «математическая физика», а способы их решения называют методами математической физики [Власова, 2001].

Предметом изучения математической физики является теория математических моделей физических явлений. Широкое распространение методов математической физики связано с общностью математических моделей, базирующихся на фундаментальных законах природы: законы сохранения массы, энергии, заряда, количества движения. Это приводит к тому, что одни и те же математические модели описывают физические явления различной природы.

Математическая физика обычно исследует процессы в некоторой пространственной области, заполненной непрерывной материальной средой, так называемой сплошной средой. Величины, описывающие состояние среды и происходящие в ней физические процессы, зависят от пространственных координат и времени. В общем случае модели математической физики описывают поведение системы на трех уровнях: взаимодействие системы в целом с внешней средой; взаимодействие между элементарными объемами системы и свойства отдельно взятого элементарного объема системы.

Взаимодействия системы с внешней средой приводят к формулировке краевых условий, т.е. условий на границе области решения задачи, включающих в общем случае граничные и начальные условия. На втором уровне происходит описание взаимодействия элементарных объемов на основе законов сохранения физических субстанций и их переноса в пространстве. Третий уровень соответствует установлению уравнений состояния среды, т.е. построению математических моделей поведения среды в элементарном объеме.

Уравнения математической физики возникли из рассмотрения таких важнейших физических задач, как распространение звука в газах, волн в жидкостях, тепла в физических телах. В наше время активно изучаются такие явления, как ядерные реакции, гравитация, электромагнитные эффекты, происхождение и развитие Вселенной. Математические модели этих разных физических явлений приводят к уравнениям с частными производными.

Уравнением с частными производными называют уравнение, в которое входят неизвестная функция, зависящая от нескольких переменных, и ее частные производные. Зависимость от многих переменных неизвестной функции существенно усложняет решение уравнений с частными производными. Очень мало таких уравнений решается в явном виде.

В связи с развитием вычислительной техники возросла роль численных методов приближенного решения задач математической физики. Но при этом не утратили своего значения приближенные аналитические методы, позволяющие получить в конечном виде соотношения между искомыми функциями и заданными параметрами рассматриваемой задачи.

Точное аналитическое решение задач математической физики обычно требует интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. Эти уравнения необходимо проинтегрировать в некоторой пространственно-временной области, на границе которой искомые функции подчинены заданным краевым условиям. Поэтому точное аналитическое решение таких уравнений возможно лишь в редких случаях, что подчеркивает значимость приближенных методов решения. Прежде чем перейти к методам решения уравнений, рассмотрим классификацию дифференциальных уравнений с частными производными.

1.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

Многие задачи математической физики приводят к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Для неизвестной функции u , зависящей от двух переменных x и y линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет следующий вид

[Араманович, 1969]:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y). \quad (1.2.1)$$

Предполагаем, что все коэффициенты уравнения постоянны. Большинство дифференциальных уравнений математической физики представляют частные случаи общего уравнения (1.2.1).

Л. Эйлер доказал, что любое дифференциальное уравнение вида (1.2.1) с помощью замены независимых переменных x и y может быть приведено к одному из следующих трех видов:

1. Если $AC - \frac{B^2}{4} > 0$, то после введения новых независимых переменных ξ и η уравнение (1.2.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_1 u = f_1(\xi, \eta). \quad (1.2.2)$$

В этом случае уравнение называется *эллиптическим*. Наиболее простым эллиптическим уравнением является уравнение Лапласа.

2. Если $AC - \frac{B^2}{4} < 0$, то уравнению 1.2.1 можно придать вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_2 u = f_2(\xi, \eta). \quad (1.2.3)$$

Такое уравнение называется *гиперболическим*; простейшим примером его является одномерное уравнение свободных колебаний.

3. Если $AC - \frac{B^2}{4} = 0$, то уравнение (1.2.1) приводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + D_3 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_3 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_3 u = f_3(\xi, \eta). \quad (1.2.4)$$

Данное уравнение называется *параболическим*. Примером его служит уравнение линейной теплопроводности.

Наименования уравнений объясняются тем, что при исследовании общего уравнения кривых второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

оказывается, что кривая представляет:

в случае $AC - \frac{B^2}{4} > 0$ — *эллипс*;

в случае $AC - \frac{B^2}{4} < 0$ — *гиперболу*;

в случае $AC - \frac{B^2}{4} = 0$ — *параболу*.

Окончательно любое уравнение вида 1.2.1 может быть приведено к одному из следующих канонических типов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + cu = f \text{ (эллиптический тип),}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + cu = f \text{ (гиперболический тип),}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = f \text{ (параболический тип),}$$

(c — постоянное число, f — функция переменных x и y).

Уравнения гиперболического и параболического типов возникают чаще всего при изучении процессов, протекающих во времени (уравнения колебаний, распространения волн, распространения тепла, диффузии). В одномерном случае всегда участвует одна координата x и время t . Дополнительные условия для таких задач разделяются на *начальные* и *краевые*.

Начальные условия состоят в задании при $t = 0$ значений искомой функции u и ее производной (в гиперболическом случае) или только значений самой функции (в параболическом случае).

Краевые условия для этих задач заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции $u(x, t)$ на концах интервала изменения координаты. Если процесс протекает в бесконечном интервале изменения координаты x , то краевые условия отпадают, и получается задача только с начальными условиями, или, как ее часто называют, *задача Коши*.

Если ставится задача для конечного интервала, то должны быть заданы и начальные и краевые условия. Тогда говорят о смешанной задаче.

Уравнения эллиптического типа возникают обычно при исследовании стационарных процессов. Время t в эти уравнения не входит, и обе независимые переменные являются координатами точки. Такими оказываются уравнения стационарного температурного поля, электростатического поля и уравнения многих других физических задач. Для задач такого типа ставятся только краевые условия, т. е. указывается поведение неизвестной функции на контуре области. Это может быть задача Дирихле, когда заданы значения самой функции; задача Неймана, когда заданы значения нормальной производной искомой функции, и задача, когда на контуре задана линейная комбинация функции, и ее нормальной производной.

В основных задачах математической физики именно физические соображения подсказывают, какие дополнительные условия следует поставить в той или иной задаче, чтобы получить единственное ее решение, отвечающее характеру изучаемого процесса.

Кроме того, следует иметь в виду, что все выведенные уравнения носят идеализированный характер, т. е. отражают лишь наиболее существенные черты процесса. Функции, входящие в начальные и краевые условия, в физических задачах определяются из экспериментальных данных и могут считаться известными лишь приближенно.

1.3. Нелинейные уравнения гидродинамики

Линейные интегро-дифференциальные уравнения описывают волновые процессы, обладающие свойством суперпозиции. В линейных волнах пространственно-временные спектральные составляющие волновых полей распространяются без искажений и не взаимодействуют друг с другом.

Линейная среда представляет собой некоторую идеализированную модель описания реальной среды, и это описание не всегда адекватно. Применимость модели линейной среды зависит, в первую очередь, от величины отношения амплитуды волны к характерной величине, определяющей свойства среды. В линейной среде отношение амплитуды волны к характерной величине среды полагается бесконечно малым, в результате чего волновое уравнение становится линейным.

При конечной величине этого отношения в волновом уравнении необходимо учитывать *нелинейные члены*. Учет нелинейных членов в волновом уравнении приводит к качественно новым явлениям. Если на вход такой системы подается монохроматическая волна, то нелинейность приводит к последовательному возбуждению временных гармоник исходной волны. Расширение частотного спектра в дальнейшем приводит к искажению формы исходного синусоидального профиля волны.

В волновых системах степень нелинейного взаимодействия определяется как рассмотренной локальной нелинейностью, так и соотношением протяженности области взаимодействия к длине волны. Протяженность области эффективного взаимодействия гармоник во многом зависит от дисперсии и диссипации среды. Энергообмен между гармониками зависит от соотношения фаз. В среде без частотной дисперсии все волны бегут с одинаковыми скоростями, и фазовые соотношения сохраняются в процессе распространения между гармониками. Это условие называется условием *синхронизма*. Если затухание волн мало, то даже незначительные нелинейные эффекты могут накапливаться пропорционально расстоянию, и волна со временем станет неустойчивой, разрывной [Виноградова и др., 1979].

В случае среды с дисперсией фазовые скорости волн на различных частотах различны, вследствие чего соотношения между фазами гармоник изменяются в пространстве весьма быстро. При нарушении фазового синхронизма нелинейные эффекты не накапливаются и перекачка энергии незначительна. Поэтому в диспергирующих средах заметных искажений формы профиля волны не происходит.

Рассмотрим нелинейные уравнения, которые часто используются в гидродинамике, хотя они встречаются и во многих других областях современной физики. Учитывая аналогичность нелинейных эффектов любой природы, можно создать модельное уравнение для одномерной

волны [Бреховских, Гончаров, 1982; Габов, 1988]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.3.1)$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ — параметр нелинейности; L — линейный оператор, соответствующий определенной дисперсии линейных волн.

Если $L = c\partial/\partial x$, получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.3.2)$$

Это нелинейное уравнение акустического типа без учета дисперсии и диссипации, его решением являются Римановы инварианты, приводящие к разным скоростям распространения областей сжатия и растяжения.

Если $L = c \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3}$, получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.3.3)$$

Это уравнение Кортевега–де Вриза для нелинейных сред с дисперсией, оно описывает поверхностные волны на мелководье и является частным случаем более общего уравнения для мелкой воды

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3} H \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0. \quad (1.3.4)$$

Уравнение 1.3.4 называется *уравнением Буссинеска*, оно описывает нелинейные волны малой амплитуды, движущиеся как влево, так и вправо. Для случая двумерных волн на мелкой воде используется уравнение Кадомцева–Петвиашвили:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3c}{2H} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6} c H^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.3.5)$$

Огибающие цуга поверхностных волн на глубокой воде описываются кубическим уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu |u|^2 u = 0. \quad (1.3.6)$$

Уравнение Шредингера относится к параболическому типу с одной пространственной переменной.

Для описания поверхностных волн на мелкой воде с произвольной дисперсией используется уравнения Уизема с интегральным оператором:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s) u_s(s, t) ds = 0. \quad (1.3.7)$$

Для изучения эффектов вязкости в жидкостях модельным уравнением является *уравнение Бюргерса*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.3.8)$$

Уравнение Бюргерса относится к параболическому типу и является одномерным случаем уравнения *Навье–Стокса*. Уравнение Навье–Стокса описывает двумерные волновые процессы в вязкой несжимаемой жидкости:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v \nabla)v = -\nabla p + \eta \Delta v + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \nabla \nabla v. \quad (1.3.9)$$

Процесс распространения ограниченного звукового пучка в нелинейной среде описывается двумерным *уравнением Хохлова–Заболотской–Кузнецова*:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p', \quad (1.3.10)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — лапласиан по поперечным координатам.

В теории колебаний и солитонов применяется *уравнение Клейна–Гордона*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = V'(u), \quad (1.3.11)$$

здесь $V'(u)$ — некоторая нелинейная функция, зависящая от u . При $V'(u) = \sin u$ уравнение Клейна–Гордона преобразуется в так называемое уравнение *sin-Гордона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin u. \quad (1.3.12)$$

Уравнение sin-Гордона используется для описания топологических солитонов с геометрией поверхностей отрицательной гауссовой кривизны.

В теории нелинейных волн также используется уравнение, имеющее решение типа бегущих волн произвольной формы:

$$\left(1 - \frac{\partial u^2}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left(1 + \frac{\partial u^2}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3.13)$$

Это *уравнение Борна–Инфельда*, оно описывает скачки фаз при взаимодействии двух солитонов.

1.4. Методы решения нелинейных уравнений. Метод последовательных приближений

Существуют различные приближенные аналитические методы решения задач математической физики. Выбор подходящего метода решения уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи. *Нелинейные уравнения* можно разделить на два класса — алгебраические

и трансцендентные. Алгебраическими уравнениями называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие), называются трансцендентными [Амосов и др., 1994; Шуп Терри, 1990].

Методы решения нелинейных уравнений можно разделить на две группы:

1. *Точные методы*;
2. *Итерационные методы*.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. В некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно. Для их решения используются итерационные методы с заданной степенью точности.

Решить уравнение *итерационным методом* означает: установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней с нужной точностью. Приближенные значения корней (начальные приближения) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены *графическим* способом.

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0 . Каждый такой шаг называется итерацией. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня x_1, x_2, \dots, x_n . Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс сходится. К итерационным методам относится *метод последовательных приближений* (или метод простой итерации).

Сущность метода последовательных приближений состоит в следующем. Уравнение $f(x) = 0$, которое необходимо решить, переписывается в виде

$$x = \varphi(x). \quad (1.4.1)$$

После этого выбирается начальное приближение x_1 и подставляется в правую часть уравнения (1.4.1). Полученное значение $x_2 = \varphi(x_1)$ принимают за второе приближение для корня. Если найдено приближение x_n , то следующее приближение x_{n+1} определяют по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Пусть после нескольких приближений мы получим, что с заданной степенью точности выполняется равенство $x_n \approx x_{n+1}$. Так как $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, то это значит, что с заданной точностью выполняется равенство $x_n \approx \varphi(x_n)$, т.е. что x_n — приближенное значение корня уравнения $x = \varphi(x)$.

При использовании метода последовательных приближений необходимо выяснить следующие особенности:

1. Если имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, то является ли число ξ решением уравнения $x = \varphi(x)$?
2. Всегда ли последовательность x_1, \dots, x_n сходится к некоторому числу ξ ?
3. Как быстро приближаются числа x_1, \dots, x_n к корню ξ уравнения $x = \varphi(x)$?

Отвечая на первый вопрос, допустим, что числа $x_1, \dots, x_n \dots$ приближаются к числу ξ . Рассмотрим равенство $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, дающее выражение следующего приближения через предыдущее. С увеличением n его левая часть приближается к ξ , а правая часть — к $\varphi(\xi)$. Поэтому в пределе мы и получим $\xi = \varphi(\xi)$, т.е. ξ является корнем уравнения $x = \varphi(x)$.

На второй вопрос ответ неоднозначный, для этого рассмотрим геометрическое представление метода последовательных приближений [Виленкин, 1968].

Геометрический смысл метода последовательных приближений

Отыскание корня ξ уравнения $x = \varphi(x)$ есть не что иное, как нахождение абсциссы точки A пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$. Построим на плоскости xOy графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Каждый действительный корень ξ уравнения (1.4.1) является абсциссой точки пересечения A кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 1.4.1а).

Отправляясь от некоторой точки $A_0(x_0, \varphi(x_0))$, строим ломаную $A_0 B_1 A_1 B_2 A_2 \dots$ — («лестница»), звенья которой попеременно параллельны оси Ox и оси Oy , вершины A_0, A_1, A_2, \dots лежат на кривой $y = \varphi(x)$, а вершины B_1, B_2, B_3, \dots — на прямой $y = x$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2, \dots , очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения x_1, x_2, \dots корня ξ .

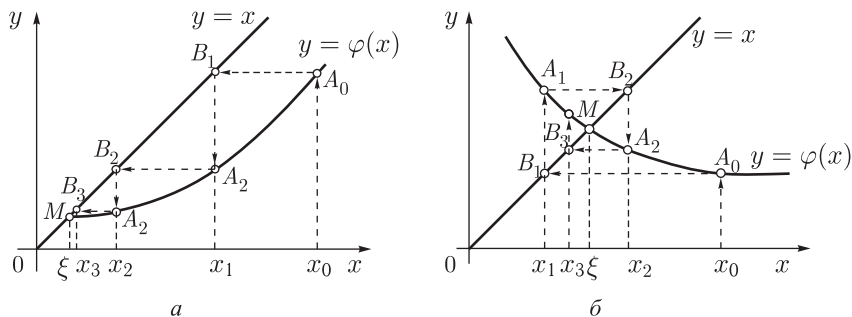


Рис. 1.4.1. Сходящиеся итерационные процессы

Возможен также другой вид ломаной $A_0 B_1 A_1 B_2 A_2 \dots$ — «спираль» (рис. 1.4.1б). Решение в виде «лестницы» получается, если про-

изводная $\dot{\varphi}(x)$ положительна, а решение в виде «спирали», — если $\dot{\varphi}(x)$ отрицательна.

Таким образом, геометрический смысл способа последовательных приближений заключается в том, что мы двигаемся к искомой точке пересечения кривой и прямой по ломаной линии. При этом вершины ломаной линии попеременно лежат на кривой и на прямой, а стороны попеременно имеют горизонтальное и вертикальное направления (рис. 1.4.1).

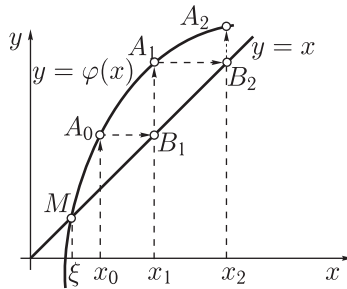


Рис. 1.4.2. Расходящийся итерационный процесс

На рис. 1.4.1а, б кривая $y = \varphi(x)$ в окрестности корня ξ — пологая, то есть $|\varphi'(x)| < 1$, и процесс итерации сходится. Однако если рассмотреть случай, когда $\varphi'(x) > 1$, то процесс итерации может быть расходящимся (рис. 1.4.2). Поэтому для практического применения метода последовательных приближений необходимо выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

1.5. Основные законы гидродинамики идеальной жидкости

Гидродинамика изучает движение жидкостей и газов. Основные принципы гидродинамики были установлены еще Эйлером, Бернулли и Лагранжем. Для вывода основных законов вначале будем считать жидкость идеальной, т. е. жидкость не имеет внутреннего трения, и механическая энергия не переходит в тепловую. Пренебрегаем также теплообменом между различными объемами жидкости. Это означает, что все процессы протекают при постоянной энтропии и напряженное состояние жидкости характеризуется одной скалярной величиной — давлением p .

Движение жидкости можно считать определенным, если все величины, характеризующие жидкость (скорость движения частиц v , давление p , плотность ρ , температура T и т. п.), будут заданы как функции координат и времени. Этот способ задания движения жидкости был предложен Эйлером. При этом, фиксируя некоторую точку простран-

ства, мы следим за изменением во времени соответствующих величин в этой точке. Фиксируя момент времени, мы найдем изменение этой величины от точки к точке. Однако никакой информации о том, какая именно частица жидкости находится в данной точке в данный момент времени и как она перемещается в пространстве, мы непосредственно не имеем.

Другой способ описания течений, в основу которого положено описание движения отдельных жидких частиц, было предложено Лагранжем. При лагранжевом описании фиксируется внимание на определенных частицах жидкости и прослеживается, как изменяются со временем их местоположение, скорость, давление, плотность, температура и другие величины в их окружении.

Эти два описания движения вполне равноправны, и выбор одного из них в каждом конкретном случае диктуется только соображениями удобства. Большинство приборов измеряют характеристики жидкости в фиксированной точке, т. е. дают эйлерову информацию. Если же покрасить (пометить) часть жидкости, то по растеканию краски получают лагранжеву информацию о движении. Поэтому способ Лагранжа проще описывает процесс диффузии, связанный с перемещением частиц.

Система уравнений гидродинамики

Уравнение неразрывности. Одним из фундаментальных уравнений гидродинамики является уравнение неразрывности, или закон сохранения вещества. Он показывает, что масса жидкости в объеме, охватывающем все время одни и те же частицы, сохраняется. Математически это можно записать так [Бреховских, 1982]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (1.5.1)$$

или в частных производных:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{v} \right) dV = 0, \quad (1.5.2)$$

откуда в силу произвольности объема V , приравняв нулю подинтегральное выражение, получаем искомое уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{v} = 0 \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \text{ или } \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (1.5.3)$$

Интегральная форма уравнения неразрывности (1.5.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} n dS \quad (1.5.4)$$

имеет простой физический смысл (с учетом теоремы Остроградского–Гаусса) — скорость изменения массы жидкости внутри фиксированного

объема V равна массе жидкости (с обратным знаком), вытекающей в единицу времени из объема через его поверхность S .

Уравнение Эйлера. Перейдем к выводу уравнения движения жидкости, называемого также уравнением Эйлера. Для этого достаточно применить второй закон Ньютона: производная по времени от количества движения (импульса) некоторого объема жидкости равна сумме сил, действующих на этот объем:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S, \quad (1.5.5)$$

где $\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{f} dV$ — внешняя объемная сила (\mathbf{f} — сила, отнесенная к единице массы); \mathbf{F}_S — сила, действующая на объем V со стороны окружающей среды через ограничивающую поверхность S , $\mathbf{F}_S = - \int_S p \mathbf{n} dS$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к S .

Воспользовавшись произвольностью объема V , получаем искомое уравнение Эйлера:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}. \quad (1.5.6)$$

Полнота системы уравнений. Уравнение (1.5.6) вместе с уравнением неразрывности (1.5.3) составляет четыре скалярных уравнения для пяти скалярных величин (плотности ρ , давления p и трех компонент вектора скорости v_i). Следовательно, система уравнений пока незамкнута. Замыкающими для нее являются термодинамическое уравнение состояния, связывающее три величины — давление p , плотность ρ и энтропию s :

$$p = p(\rho, s) \quad (1.5.7)$$

и уравнение для энтропии. Как мы отметили, энтропия данной жидкой частицы остается постоянной, т. е.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s = 0. \quad (1.5.8)$$

Энтропию s можно исключить из уравнений, для этого нужно из (1.5.7) взять производную по времени и обозначить

$$c^2 = (\partial p / \partial \rho)_s. \quad (1.5.9)$$

В результате получаем

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (1.5.10)$$

где c^2 уже следует считать заданной функцией p и ρ , причем — является скоростью звука в среде.

Если жидкость является баротропной, т. е. давление зависит только от плотности:

$$p = p(\rho), \quad (1.5.11)$$

то последнее уравнение и будет замыкающим для системы (1.5.3) и (1.5.6). Вид функции $p(\rho)$ зависит от свойств рассматриваемой жидкости или газа.

Полная замкнутая система уравнений (1.5.3), (1.5.6) и (1.5.10) называется системой уравнений гидродинамики идеальной жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{v} = 0 \text{ — уравнение неразрывности,}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f} \text{ — уравнение Эйлера (движения),}$$

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \text{ — уравнение состояния.}$$

Для решения конкретных задач к уравнениям нужно добавить соответствующие граничные условия. Примером силы \mathbf{f} , входящей в уравнение Эйлера (1.5.6), является сила тяжести. При этом \mathbf{f} равна вектору \mathbf{g} ($\mathbf{g} = |\mathbf{g}| = 9,81 \text{ м/с}^2$), направленному к центру Земли. В уравнения могут войти также силы притяжения Луны и Солнца, которые учитываются в теории морских приливов. В динамике океана и атмосферы оказывается существенной неинерциальность системы отсчета, связанной с вращающейся Землей. При этом в систему уравнений гидродинамики должны быть введены силы инерции: центробежная

$$\mathbf{f}_{цб} = \Omega^2 r = \nabla (\Omega^2 r^2 / 2),$$

где Ω — частота вращения Земли, и сила Кориолиса $\mathbf{f}_к = -2\Omega \times \mathbf{v}$. Заметим, что все рассмотренные нами силы, кроме кориолисовой, являются потенциальными, т.е. представимыми в виде градиента от потенциальной функции: $\mathbf{f} = -\nabla u$.

В связи с предположением о несжимаемости жидкости плотность каждой частицы должна оставаться постоянной:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho = 0.$$

При этом из уравнения состояния (1.5.10) не следует, что $dp/dt = 0$, так как в несжимаемой жидкости скорость звука c бесконечно велика. Таким образом, в несжимаемой жидкости уравнение (1.5.10) заменяется на $dp/dt = 0$ и с учетом уравнения неразрывности будем иметь

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho = 0 \quad \nabla \mathbf{v} = 0,$$

тем самым система гидродинамических уравнений остается замкнутой.

1.6. Линейные уравнения гидродинамических волн

Благодаря волновым движениям осуществляется перенос энергии в жидкости на большие расстояния без переноса массы. Разнообразные силы, действующие на жидкие частицы при их движении, приводят к различным волновым движениям. Рассмотрим основные типы волн

в жидкости в так называемом линейном приближении, когда волны распространяются независимо друг от друга. К волнам, обусловленным действием силы тяжести, относятся гравитационные поверхностные волны и внутренние волны в толще жидкости. В результате сжимаемости среды в ней распространяются акустические волны.

Линеаризация уравнений гидродинамики. При изучении волновых процессов в жидкости мы должны исходить из основных уравнений гидродинамики (1.5.3), (1.5.6) и (1.5.10) [Бреховских, Гончаров, 1982]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - g \nabla z - 2\Omega \times \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{dp}{dt} &= c^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Здесь в уравнение Эйлера мы включили силу тяжести, направленную вертикально вниз, и силу Кориолиса $-2\Omega \times \mathbf{v}$, возникающую во вращающейся с частотой Ω жидкости (например, на вращающейся Земле). Рассмотрим теорию распространения волн в идеальной жидкости, не затрагивая вопросы их возбуждения.

Важным обстоятельством при исследовании волновых движений в жидкости является нелинейность уравнений гидродинамики (1.6.1), поэтому точная теория волн в жидкости будет нелинейной теорией. Это приведет к влиянию одних волновых процессов на другие (взаимодействие волн) и к значительному усложнению процесса распространения волн каждого отдельного вида. Однако если возмущения жидкости, вызываемые волнами, малы, то уравнения гидродинамики могут быть линеаризованы относительно этих возмущений.

При этом теория волн в жидкости становится линейной и вступает в силу принцип суперпозиции. В уравнениях гидродинамики значение скорости \mathbf{v} будем считать малой величиной, а возмущенные значения давления p и плотности ρ мало отличающимися от их равновесных значений p_0 и ρ_0 соответственно. После этого, положив $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, преобразуем уравнения (1.6.1), сохраняя лишь линейные по $\mathbf{v} \equiv \{u, v, w\}$, p' и ρ' члены (линеаризация уравнений). Для состояния равновесия имеем уравнения гидростатики:

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad \frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0(z). \quad (1.6.2)$$

При линеаризации нелинейный член $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ в уравнении Эйлера выпадает, член же $\frac{\nabla p}{\rho}$ преобразуется следующим образом:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0 + \nabla p'}{\rho_0(1 + \rho'/\rho_0)} \approx \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0 \rho'}{\rho_0 \rho_0}.$$

Аналогично преобразуется нелинейный член в уравнении неразрывности

$$\nabla(\rho \mathbf{v}) = \nabla[(\rho_0 + \rho')\mathbf{v}] \approx (d\rho_0/dz)w + \rho_0 \nabla \mathbf{v}$$

и в уравнении состояния

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial z} w \approx c^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{d\rho_0}{dz} \right) w.$$

Если теперь вспомнить, что $\nabla p_0 = (dp_0/dz)\nabla z$, а также учесть уравнение гидростатики (1.6.2), то легко выписать линейную систему уравнений гидродинамики (штрихи у p' и ρ' опущены):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho_0} + g \frac{\rho}{\rho_0} \nabla z + 2\Omega \times \mathbf{v} = 0, \quad (1.6.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\nabla \rho_0}{z} w + \rho_0 \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{N^2(z)}{g} w, \end{aligned}$$

где $N^2(z) = -g(\rho_0^{-1} d\rho_0/dz + g/c^2)$ — частота Вайсяля.

Линейные граничные условия. Для свободных волн в качестве «возвращающих» сил могут выступать силы, возникающие на границах области, занятой жидкостью. Наиболее важной с этой точки зрения является свободная поверхность. Пусть в состоянии равновесия поверхность жидкости является плоской. При выведении ее из этого положения существуют двоякого рода силы, стремящиеся вернуть поверхность в прежнее состояние: сила тяжести и сила поверхностного натяжения. В результате на поверхности жидкости возникает возмущение, распространяющееся во все стороны в виде волны.

Силы, возникающие на поверхности жидкости, должны входить в граничные условия для уравнений (1.6.3). Получим их в предположении, что в состоянии равновесия свободная поверхность является плоской ($z = 0$). Пусть возвышение возмущенной поверхности описывается выражением $\zeta = \zeta(x, y, t)$. Скорость возвышения поверхности $d\zeta/dt$ должна совпадать с вертикальной скоростью частиц среды $w(x, y, z, t)$, что можно записать в виде

$$w|_{z=\zeta(x,y,t)} - \frac{d\zeta(x,y,t)}{dt} = 0. \quad (1.6.4)$$

Это так называемое кинематическое граничное условие на свободной поверхности жидкости.

Во втором, динамическом условии на свободной поверхности жидкости учитывается наличие скачка давления по обе стороны от границы, обусловленного силами поверхностного натяжения. Если давление

в жидкости $p_0(z) + p$, а давление над поверхностью p_a , то по известной формуле Лапласа

$$p_0(\zeta) + p|_{z=\zeta} - p_a = -\sigma R^{-1}, \quad (1.6.5)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; R^{-1} — сумма главных кривизн поверхности ζ , равная для поверхности $z = \zeta(x, y, t)$

$$R^{-1} = \nabla \left(\frac{\nabla \zeta}{\sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2}} \right). \quad (1.6.6)$$

Граничные условия (1.6.4) и (1.6.5) также оказались нелинейными. Линеаризуем их, считая возмущение поверхности ζ малым. При этом, применяя формулу $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla)$ для полной производной по времени, из (1.6.4) получаем

$$w|_{z=0} + \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} \zeta + \dots - \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \mathbf{v} \nabla \zeta|_{z=0} - \dots \approx w|_{z=0} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$

Аналогично из (1.6.5) с учетом (1.6.6) и $p_0(0) = p_a$ имеем

$$\frac{dp_0}{dz} \Big|_{z=0} \zeta + p|_{z=0} + \dots = -\sigma \Delta_- \zeta + \dots,$$

где $\Delta_- = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — оператор Лапласа по горизонтальным переменным. В результате, ограничиваясь только линейными членами, с учетом уравнения гидростатики (1.6.2) получаем линейные граничные условия на невозмущенной свободной поверхности $z = 0$:

$$w|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p|_{z=0} = g\rho_0(0)\zeta - \sigma \Delta_- \zeta. \quad (1.6.7)$$

Линейные уравнения для гидродинамических волн. В основных уравнениях (1.6.3) для волн в жидкости учтено изменение ее плотности за счет сжимаемости, которое описывается первыми двумя членами в уравнении состояния:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.6.8)$$

Наиболее важным следствием сжимаемости жидкости являются акустические волны. Для поверхностных и внутренних волн сжимаемость проявляется лишь в виде некоторых малых поправок, которыми мы пренебрегаем.

Формально переход к несжимаемой жидкости можно осуществить, потребовав постоянства плотности в жидкой частице:

$$d\rho/dt = 0. \quad (1.6.9)$$

При этом непосредственно из точного уравнения неразрывности (1.5.3) следует, что при движении жидкости

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (1.6.10)$$

С другой стороны, из точного уравнения состояния (1.5.10) при условии (1.6.9) имеем $c^{-2}dp/dt = 0$. Но в общем случае $dp/dt \neq 0$, например из-за изменения гидростатического давления, поэтому в несжимаемой жидкости следует считать скорость звука $c = \infty$. Этот результат отражает тот факт, что в несжимаемой жидкости упругие возмущения распространяются мгновенно. Теперь уже не составляет труда получить из (1.6.3) *линейные уравнения* гидродинамики несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho_0} + g \frac{\rho}{\rho_0} \nabla z + 2\Omega \times \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0 \frac{N^2}{g} w &= 0,\end{aligned}\tag{1.6.11}$$

где частота Вайсяля $N^2(z) = -g\rho_0^{-1}d\rho_0/dz$. Граничные условия (1.6.7), не содержащие скорости звука c , останутся неизменными. Условием применимости приближения несжимаемой жидкости ($c = \infty$) будет требование, чтобы скорость распространения рассматриваемых возмущений была значительно меньше скорости звука.

1.7. Выводы

В первой главе были описаны особенности постановки задач математической физики. Представлена классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка, к которым приводят многие задачи математической физики. Приведены дополнительные начальные и граничные условия при решении этих задач.

Описаны задачи гидродинамики, приводящие к нелинейным уравнениям гидродинамики, представлены часто используемые нелинейные уравнения. Рассмотрены методы решения нелинейных уравнений, в частности метод последовательных приближений, условия применимости данного метода и его геометрическая интерпретация. Приведены основные способы описания движения жидкости, вывод полной системы уравнений гидродинамики. Проведена линеаризация уравнений гидродинамики.

Глава 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕЛКОВОДЬЯ

2.1. Волны на поверхности моря

Наиболее распространенным видом движения жидкостей являются волны. Они могут возникать по разным причинам. Волны на поверхности моря возникают под действием ветра и сохраняются после его прекращения в течение некоторого времени в виде *зыби*. Волновые движения, охватывающие всю толщу морской воды и относящиеся к классу длинных волн, возбуждаются притяжением Луны и Солнца (*приливные волны*), подводными землетрясениями (*цунами*) или циклонической деятельностью [Монин, Красицкий, 1985].

При отсутствии ветра на поверхности моря существуют свободные поверхностные волны. Как и ветровые волны, свободные волны также могут быть случайными. Свободные волны на поверхности жидкости создаются двумя факторами — силой тяжести и поверхностным натяжением. Оба фактора действуют одновременно, но если волны достаточно длинные (с длиной $\lambda \geq 10$ см), то преобладает сила тяжести. Такие волны называются *гравитационными*; для них несущественно поверхностное натяжение. Достаточно короткие волны (с длиной $\lambda \leq 0,4$ см) обусловлены лишь поверхностным натяжением. Такие волны называются *капиллярными*; для них несущественна сила тяжести. Волны, длины которых лежат в промежуточном диапазоне, называются *гравитационно-капиллярными*; для них существенны и сила тяжести, и поверхностное натяжение. Волны из капиллярного и капиллярно-гравитационного диапазонов длин волн часто называются *рябью*.

Поверхностные гравитационные волны характеризуются, прежде всего, своими длинами λ и амплитудами a и зависят от глубины жидкости H . Когда глубина воды больше половины длины волны, то говорят о волнах на глубокой воде — они «не чувствуют» влияния дна. Меньшие значения H/λ соответствуют волнам на мелкой воде, а в пределе $H/\lambda \rightarrow 0$ может существовать уединенная волна (солитон), состоящая всего лишь из одного гребня. На глубокой воде в волне малой амплитуды отдельные частицы воды почти не перемещаются вместе с волной, а движутся по орбитам, близким к круговым, радиусы которых экспоненциально уменьшаются с глубиной. На мелкой воде и около дна эти орбиты превращаются в эллипсы, вертикальная ось которых меньше горизонтальной.

Важным частным случаем являются волны малой амплитуды, когда $a/\lambda \ll 1$. В этом случае поверхность воды представляется в виде суперпозиции простых гармонических волн, а в простейшем случае — в виде одной гармонической волны, когда поверхность воды имеет вид одного «бегущего» косинуса. Теория волн малой амплитуды называется линейной, она объясняет много важных свойств поверхностных волн. При действии нелинейных эффектов в гравитационных волнах их гребни становятся более острыми, а ложбины более пологими по сравнению с косинусоидальной волной малой амплитуды.

При скоростях ветра менее 1 м/с на спокойной поверхности воды образуются капиллярные волны. Они очень быстро возникают при порывах ветра, образуя пятна ряби на поверхности, но они также и быстро затухают под действием молекулярной вязкости. При усилении ветра возникают более крупные, гравитационные ветровые волны. В природных условиях на поверхности океана одновременно имеются самые разнообразные волны — от капиллярных волн с длинами порядка долей сантиметра до гравитационных волн зыби с длинами порядка нескольких сот метров. Максимальная высота волн зависит от скорости ветра, продолжительности его действия и разгона — расстояния, на котором ветер продолжает действовать на возникшую и распространяющуюся волну. Чем больше продолжительность действия ветра или разгон, тем выше волны.

Ветровые волны на поверхности океана имеют случайный характер. Поэтому для их описания используются статистические характеристики. Наиболее часто используются спектры волн, определяющие распределение их энергии по различным интервалам частот. Спектры ветровых волн довольно узки как по частотам, так и по направлениям распространения. Большая часть энергии сосредоточена в полосе частот порядка одной октавы. Фазовая скорость энергонесущих компонентов ветрового волнения близка к средней скорости ветра. В типичном диапазоне значений скорости ветра $10 \div 30$ м/с диапазон длин волн энергонесущих компонентов $60 \div 600$ м, диапазон периодов $5 \div 20$ с и диапазон высот $2 \div 20$ м.

В Атлантике волны редко превышают 12 м, в Тихом океане они могут достигать 15 м, несколько больше в штормовых районах Антарктики. Когда ветер стихает или волны уходят из района шторма, то они становятся более пологими и уменьшается их высота. Волны превращаются в зыбь и продолжают распространяться на большие расстояния (порядка тысячи миль), пока не достигнут берега.

При подходе гравитационных поверхностных волн к берегу или мелководью происходит изменение их характеристик, связанное с изменением глубины. Волны трансформируются, когда они начинают «чувствовать» дно. Характер трансформации зависит от рельефа дна и конфигурации береговой линии. Если при распространении волн их гребни не параллельны изобатам (линиям равной глубины), то возникает *рефракция* (преломление) — волновые лучи уже не являются прямыми

линиями (как на глубокой воде), они искривляются и стремятся стать нормальными к берегу, а фронты (гребни) — параллельными.

Разворот фронтов (гребней) происходит из-за того, что участки фронта, находящиеся ближе к берегу (на меньшей глубине), перемещаются с меньшей скоростью, чем участки на большей глубине. При рефракции волн над неровным дном изменяются их амплитуды и длины, частоты же остаются почти постоянными.

Значительным изменениям подвергается спектр волн. Искривление волновых лучей происходит также при *дифракции* волн — огибании ими препятствий. В этом случае искривление лучей уже не связано с изменениями глубины.

Волны, попадающие на мелководье у мысов, движутся медленнее, чем над понижениями дна внутри бухт. В результате фронт волн изгибается и волновые лучи сходятся вблизи мысов и расходятся в бухтах. Это приводит к концентрации энергии волн у мысов и к ее рассеянию в бухтах.

При подходе волны к берегу ее гребень движется быстрее ложбины, и орбитальная скорость частиц воды на гребне волны может превысить ее фазовую скорость. В момент, когда «гребень нагоняет подошву», передний склон волны становится отвесным, и волна обрушивается (рис. 2.1.1). Образование обрушивающихся волн в прибрежной зоне называется *прибоем*.

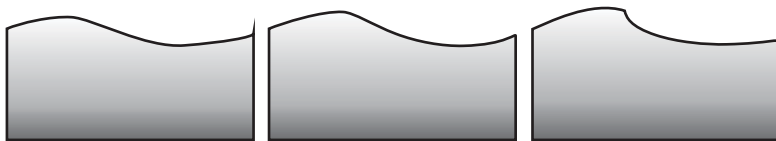


Рис. 2.1.1. Изменение профиля поверхности волны

При достаточно больших наклонах дна ($>0,03$) у берега происходит обрушивание волн в виде «*ныряющего буруна*», когда вода на гребне образует «завиток», падающий на передний склон волны. При меньших наклонах дна обрушивание волн может происходить по типу «*скользящего буруна*», когда вода стекает по ее переднему склону как бы по наклонной плоскости. Скользящий бурун в зоне прибоя используется любителями серфинга. В прибойной зоне возможна также и уединенная волна, состоящая из одного гребня.

Особым видом волнения на море является *сулой*. При сулое на поверхности моря как бы сочетаются волновые и вихревые движения. У сулая отсутствует видимое поступательное движение, они похожи на сильно нерегулярные стоячие волны. Высота волн при сулое достигает 4–5 м. Волнение при сулое издает характерный шипящий звук.

Гравитационные силы притяжения Луны и Солнца создают в океане приливы, приводящие к колебаниям его уровня и имеющие характер

длинных волн, длина которых намного превышает глубину океана. При распространении приливной волны вверх по течению некоторых рек, впадающих в океан, возникает явление, называемое *бором*. Идеальный бор представляет собой «разрывную волну» уровня воды, распространяющуюся по невозмущенной воде.

При движении судов поверхность воды возмущается за ними, и образуется след. Обычно след за судном состоит из *волнового* и *турбулентного следов*. Волновой след представляет собой регулярную систему волн, состоящую из двух различных семейств волн — продольных и поперечных. Продольные волны распространяются вдоль двух прямых — боковых линий следа, пересекающихся в районе носа судна под углом $2\theta_0$, который на глубокой воде не зависит от скорости судна и, согласно теории, составляет около 39° . Поперечные волны распространяются за кормой судна по направлению его движения и с его скоростью.

В толще океана в слоях разной плотности могут возникать *внутренние волны*. Если слой более легкой воды располагается над слоем более тяжелой воды, то между ними возникает граница раздела, аналогичная границе раздела между атмосферой и океаном. Воды океана обычно имеют устойчивую стратификацию. Поэтому внутренние волны повсеместно наблюдаются во всех районах Мирового океана.

2.2. Обзор исследований по поверхностным гравитационным волнам

Волны на поверхности воды являются одним из самых распространенных видов волнового движения в природе, доступных для визуального наблюдения. Поверхность океана практически всегда покрыта волнами, причем одновременно существуют самые разнообразные волны от капиллярных с длинами порядка миллиметров до зыби с длинами сотни метров.

Многие результаты теории поверхностных волн уже давно относятся к классической гидродинамике. Но нельзя сказать, что проблема поверхностных волн теперь окончательно решена. В последнее время получено много важных результатов, как в экспериментах, так и в теории, особенно по нелинейным волнам.

Задачу приспособления жидкостей к действию силы тяжести в качественном виде можно найти еще в работе Архимеда (287—212 гг. до н. э.) «О плавающих телах» [Гилл, 1986]. В количественном виде эта задача потребовала сначала открытия законов движения и развития исчислений, необходимых для применения этих законов. Эти открытия были представлены в работе И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» [Newton, 1686] (напечатанна им с помощью своего друга Э. Галлея). К этому времени в работах Б. Паскаля были подробно описаны законы гидростатики и природа сил давления.

При движении материального элемента его масса постоянна, но его объем может меняться. Поэтому его плотность может изменяться, а это изменение зависит от поля скоростей жидкости. Уравнение, связывающее скорость изменения плотности с полем скоростей движения жидкости, называется уравнением сохранения массы. Существуют два эквивалентных способа записи этого уравнения в соответствии с различными методами его вывода. В первом методе, примененном Л. Эйлером [Euler, 1755], в работе об уравнениях движения рассматриваются изменения, происходящие с материальным элементом в процессе его движения. Он составил уравнение неразрывности и уравнение импульса:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}, \quad (2.2.1)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность среды, \mathbf{f} — сила, отнесенная к единице массы.

Во втором методе, предложенном Ж. Лагранжем [Lagrange, 1781], рассматриваются изменения, происходящие в фиксированном элементе объема.

Среди первых задач, рассмотренных с помощью уравнений движения, была задача отклика океана и атмосферы на силу тяжести. В работе «О волнах» П. Лаплас [Laplace, 1778] рассматривает задачу о равновесном состоянии однородной жидкости постоянной глубины, у которой свободная поверхность в начальный момент имела небольшое отклонение. В этой работе П. Лаплас получил уравнение движения жидкости на вращающейся сфере под действием приливообразующих сил:

$$\nabla^2 p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0, \quad (2.2.2)$$

где $p = -\rho g z + p'$ — возмущение равновесного давления, g — гравитационная постоянная.

П. Лаплас вывел дисперсионное соотношение, которое показывает, что возмущения удаляются от области отклонения со скоростью, зависящей от кривизны поверхности жидкости [Гилл, 1986]:

$$\omega^2 = g k \tanh kH, \quad (2.2.3)$$

где k — волновое число, H — глубина жидкости.

Следствием дисперсионного соотношения является зависимость фазовой скорости от волнового числа. Поэтому волны с различными длинами, исходящие из одной и той же точки, будут двигаться с различными скоростями. Следовательно, волны будут диспергировать или разбегаться. Это явление называется дисперсией. Эффект дисперсии ярко выражен у океанских волн, генерируемых удаленным штормом. Так как длинные волны двигаются быстрее, они приходят первыми и могут опережать на один или два дня более короткие волны, идущие от того же шторма.

В работе [Lagrange, 1781] Ж. Лагранж представил вывод уравнений мелкой воды (при $kH \ll 1$). Волновое уравнение в случае постоянной глубины имеет вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = c^2 \nabla^2 \zeta, \quad (2.2.4)$$

где $c^2 = gH$ — скорость распространения, ζ — возвышение поверхности.

Данное уравнение имеет решение вида

$$\zeta = \zeta_0 \cos(kx + ly - \omega t),$$

$k=(k,l)$ — волновой вектор.

Как отмечал Ж. Лагранж, волновое уравнение выглядит так же, как и уравнение для распространения звука, и существует полная аналогия между волнами мелкой воды малой амплитуды и двумерными звуковыми волнами малой амплитуды.

Теория мелкой воды после Ж. Лагранжа была дополнена Г. Эйри [Airy, 1845]. Он впервые сформулировал предельные уравнения для анализа очень длинных волн конечной амплитуды в мелкой воде. Но в уравнениях Г. Эйри не учитывались дисперсионные эффекты. Г. Эйри также исследовал распространение волн в канале. Если амплитуда волны сравнима со средней глубиной, то при распространении в канале прямоугольного сечения происходит изменение ее формы.

Методом последовательных приближений Г. Эйри нашел, что в прогрессивной волне различные части движутся с различными скоростями: в направлении положительной оси x

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\eta}{H}} + u, \quad (2.2.5)$$

в направлении отрицательной оси x

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\eta}{H}} - u. \quad (2.2.6)$$

Так как скорость волны растет вместе с возвышением, то оказывается, что в прогрессивной системе волн наклон на передней стороне делается все более крутым, а на задней стороне все более пологим, и здесь может быть достигнуто такое состояние, когда нельзя пренебрегать вертикальным ускорением. Поэтому данная теория становится не применимой, и наблюдения показывают, что гребни стремятся свернуться в завиток и затем распадаются.

Аналогичным методом Б. Риман [Riemann, 1892] при изложении акустической задачи установил, что скорости распространения вершин и впадин волны отличаются (Римановы инварианты). Мощные возмущения перемещаются с большей скоростью, догоняя слабые. Это приводит к изменению формы волны, к укрупнению переднего фронта возмущения.

Для решения задачи о волнах на глубокой воде, создаваемых локальным возмущением в 1816 г., Французской академией была объявлена премия [Юэн, 1987]. Эта задача была решена в том же году независимо А. Коши [Cauchy, 1815] и С. Пуассоном [1816].

Рассматривались волновые движения с незначительными скоростями, отклонения поверхности жидкости также являются малыми величинами. В дальнейшем эта теория стала называться *теорией бесконечно малых волн*. Данные упрощения задачи о волнах были предложены А. Коши. Он получил граничное условие для потенциала скорости $\varphi(x, y, z)$:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0. \quad (2.2.7)$$

Функция потенциала скорости $\varphi(x, y, z)$ должна удовлетворять условию обтекания стенок сосуда и полученному граничному условию. Для этой теории граничное условие должно соблюдаться на невозмущенной волнами горизонтальной плоскости $z = 0$. При известной функции $\varphi(x, y, z)$ уравнение открытой поверхности находится дифференцированием граничного условия.

Однако система точных уравнений, описывающих форму волнового движения для бесконечной глубины жидкости, была установлена еще в 1802 г. чешским ученым Ф. Герстнером [Gerstner, 1809], а позднее независимо У. Ранкином [Rankine, 1863]. Особенностью данного волнового движения является его вихревой характер.

Ф. Герстнер заранее исходил из того, что частицы жидкости в волне описывают окружности, радиусы которых убывают с глубиной. Это допущение основывалось на результатах прямых наблюдений за поведением поплавков в воде. Полученное им уравнение движения имело решение по x и z в форме уравнения трохойды [Лемб, 1947]:

$$x = \frac{\theta}{k} + a \sin \theta, \quad z = -a \cos \theta. \quad (2.2.8)$$

Трохоида получается в результате движения точки, расположенной на радиусе между центром и ободом колеса, катящегося по горизонтальной прямой, расположенной на высоте невозмущенной поверхности воды (рис. 2.2.1). Такая волна называется *трохоидальной*, гребни такой волны лежат выше спокойной поверхности на величину $\xi_{\text{греб.}} = a + \pi/\lambda^2$, а впадины — $\xi_{\text{впад.}} = a - (\pi/\lambda) a^2$.

Частицы жидкости в них движутся по окружностям, радиус которых экспоненциально убывает с глубиной. В предельном случае волна приобретает форму циклоиды, крутизна такой волны составляет $2a/\lambda \approx 0,32$, а в природе обычно крутизна не превышает значения 0,15.

Однако трохойдальные волны сопровождаются вихревым движением жидкости и это является существенным недостатком этой теории. Высокие волны с острыми гребешками не могут продолжать свой бег, так как их гребни опрокидываются и разрушаются, и волны уменьшаются по высоте.

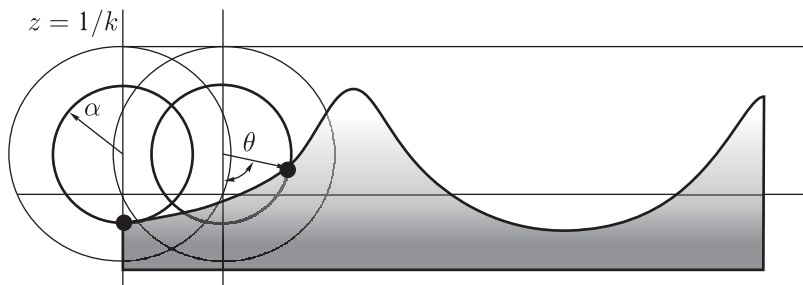


Рис. 2.2.1. Трохоидальная волна

Первые шаги в направлении общей теории волн конечной амплитуды, сопровождаемых потенциальным движением жидкости, были сделаны в 1847 г. Дж.Г. Стоксом [Stokes, 1847] в работе «К теории осциллирующих волн». Решая методом последовательных приближений уравнение движения, он получил формулы для подсчета профиля волны и выяснил особенности движения.

Уравнение волны Стокса имеет следующий вид [Лемб, 1947]:

$$\xi = a \cos(kx - \omega t) - \frac{1}{2}ka^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{3}{8}k^2a^3 \cos 3(kx - \omega t). \quad (2.2.9)$$

Волна Стокса симметрична относительно вертикальных прямых, проходящих через гребни или впадины, однако она несимметрична относительно плоскости невозмущенного уровня. Гребень такой волны лежит выше этой плоскости на величину

$$\xi_{\text{греб.}} = a(1 + \frac{1}{2}ka + \frac{3}{8}k^2a^2),$$

а впадина ниже — на величину

$$\xi_{\text{впад.}} = a(1 - \frac{1}{2}ka + \frac{3}{8}k^2a^2).$$

При этом впадины имеют более пологое очертание, чем гребни. С увеличением высоты при данной длине гребни волн становятся все более заостренными и приближаются к предельной форме в угловой точке 120° .

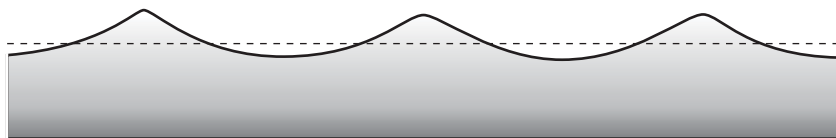


Рис. 2.2.2. Профиль волны Стокса

Дж. Мичелл [Michell, 1893] численно нашел периодическую волну наибольшей высоты для воды с бесконечной глубиной и обнаружил, что предельная высота достигается при $2a/\lambda = 0,142$.

Скорость распространения волны Стокса зависит не только от длины, но и от амплитуды:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} (1 + k^2 a^2)}. \quad (2.2.10)$$

На рис. 2.2.2 показан профиль волны Стокса при $ka = 1/2$ или $a/\lambda = 0,00796$ [Лемб, 1947]. Профиль волны (приближающийся к трохойде), имеет очертание, более острое на гребнях и более пологое во впадинах.

Траектории частиц в волновом движении (рис. 2.2.3) оказываются незамкнутыми из-за наличия волнового течения со скоростью

$$v_{\text{вол.}} = a^2 k^2 \sqrt{\frac{g}{k}} e^{2kz}. \quad (2.2.11)$$

Для волн, имеющих предельную форму и распространяющихся на спокойной воде, частицы на гребнях движутся с такой же скоростью вперед, как и сама волна. Другое интересное свойство этих волн установившейся формы состоит в том, что они имеют по отношению к невозмущенной воде некоторое количество движения в направлении распространения волн.

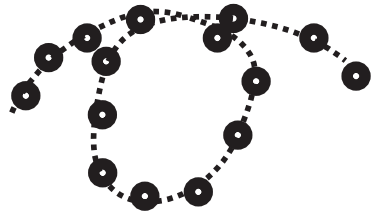


Рис. 2.2.3. Траектория движения частиц в волновом движении

Доказательства сходимости стоксовского разложения дали Т. Леви-Чивита в 1925 г. [Levi-Civita, 1925] и Д. Струик в 1926 г. [Struik, 1926]. Хотя впервые строгое доказательство существования периодических установившихся волн конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной и конечной глубины было дано в 1921 г. А. И. Некрасовым [Некрасов, 1921]. Однако сходимость стоксовского разложения не означает устойчивость и для стоксовских волн, в глубокой воде имеет место неустойчивость.

Доказательство существования периодических установившихся волн в неоднородной несжимаемой жидкости было дано М. Дюбрейл-Жакотен в 1937 г. [Dubreil-Jacotin, 1937]. Была определена форма линии тока установившегося течения неоднородной жидкости, и было получено уравнение, описывающее установившиеся волны.

В 1834 г. любопытную волну на воде наблюдал шотландский ученый Джон Скотт Расселл [Russell, 1844]. Он изучал пропускную способность канала Юнион вблизи Эдинбурга, и следил за движением баржи, которую тянула пара лошадей. Неожиданно баржа остановилась,

но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась, а собралась у носа судна, а затем оторвалась от него. Далее эта масса воды покатила по каналу с большой скоростью в виде уединенного возвышения, не меняя своей формы и не снижая скорости. Высота ее составляла около 40 см, длина порядка 9 м, скорость около 10 км/ч (9 миль/ч) [Зарембо, 1984].

Он наблюдал эту волну верхом на лошади, что позволило ему достаточно долго и с необходимой скоростью сопровождать эту волну. На протяжении всей жизни Дж. Рассел неоднократно возвращался к наблюдению за этой волной, поскольку верил, что открытая и названная им «*уединенная волна*» играет важную роль во многих явлениях в природе. Он установил некоторые свойства этой волны.

Во-первых, он заметил, что она движется с постоянной скоростью и без изменения формы. Во-вторых, нашел зависимость скорости c этой волны от глубины канала H и высоты волны a :

$$c = \sqrt{g(a + H)}. \quad (2.2.12)$$

В-третьих, Дж. Рассел обнаружил, что возможен распад одной большой волны на несколько волн. В-четвертых, он отметил, что в экспериментах наблюдаются только волны возвышения. Он также обратил внимание, что открытые им уединенные волны проходят друг через друга без каких-либо изменений, как и малые волны, образованные на поверхности воды.

Через 10 лет в 1844 г. Дж. Расселл опубликовал свои исследования в работе под названием «Доклад о волнах» [Russell, 1844]. Работа вызвала осторожную реакцию в среде ученых, но на нее обратили внимание Г. Эйри и Дж. Стокс. Г. Эйри подверг критике результаты экспериментов. Он отметил, что из теории длинных волн на мелкой воде выводы Дж. Расселла не получаются, и утверждал, что длинные волны не могут сохранять неизменную форму. Дж. Стокс также не согласился с результатами наблюдений Дж. Расселла и критически отнесся к факту существования уединенной волны.

После негативного отношения к открытию уединенной волны долгое время о ней не вспоминали. Противоречие между экспериментами Дж. Расселла и теорией мелкой воды Г. Эйри (а также стоковским разложением для осциллирующих волн постоянной формы) было разрешено Дж. Буссинеском [Boosinesq, 1871] и Дж. У. Рэлеем [Rayleigh, 1876]. Они независимо друг от друга нашли аналитическую формулу для возвышения свободной поверхности на воде в виде квадрата гиперболического секанса и вычислили скорость распространения уединенной волны на воде. Позднее опыты Дж. Расселла были повторены другими исследователями и получили подтверждение.

Дж. Буссинеск и Дж. У. Рэлей показали, что правильный учет ускорения в вертикальном направлении, которое обуславливает дисперсию и которое не учитывается в теории мелкой воды Г. Эйри, а также

конечности амплитуды, ведет к решению

$$\zeta = a \sec h^2 \left(\frac{x - ct}{\lambda} \right), \quad \varepsilon = \frac{a}{H} < 1, \quad \gamma = \left(\frac{H}{\lambda} \right)^2, \quad (2.2.13)$$

где ε — нелинейный параметр, γ — дисперсионный параметр.

Уравнения Дж. Буссинеска в своей традиционной форме представляют уравнения смещения на свободной поверхности и усредненной скорости в горизонтальном направлении. Они не ограничены одним направлением распространения, и эквивалентны уравнениям для смещения свободной поверхности и скорости в горизонтальном направлении на ровном дне канала. Эти уравнения впервые были представлены Дж. Буссинеском в докладе Французской Академии в 1872 г. [Юэн, 1987].

Окончательная ясность в проблеме уединенной волны наступила после работы голландских ученых Д. Д. Кортвега и его аспиранта Г. де Вриза, которые попытались разобраться в существе наблюдений Дж. Расселла. Обобщив метод Дж. Рэлея, эти ученые в 1895 г. вывели уравнение для описания длинных волн на воде [Korteweg, de Vries, 1895].

Д. Кортвег и Г. де Вриз предположили, что амплитуда рассматриваемых волн была много меньше, чем глубина бассейна, а длина волны была много больше, чем глубина бассейна. Уравнение, которое было ими получено, имеет вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{H} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} H^2 c \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (2.2.14)$$

Уравнение Кортвега–де Вриза может быть получено из системы уравнений Буссинеска, описывающих волны, распространяющиеся только вправо.

Уравнение Кортвега–де Вриза имеет волновое решение, известное с конца позапрошлого века. Оно выражается через специальную эллиптическую функцию, изученную Карлом Якоби, которая носит теперь его имя:

$$u(x, t) = \varepsilon \times cn^2 \left[\sqrt{\frac{3\gamma}{4H^2}} \times (x - Ut) \right]. \quad (2.2.15)$$

Из-за эллиптической функции Якоби Кортвег и де Вриз называли эти решения *кноидальными* волнами. При некоторых условиях эллиптическая функция Якоби переходит в гиперболический секанс и решение уравнения является предельным случаем бесконечно большого периода волны. Именно этот предельный случай является уединенной волной, соответствующей наблюдению Дж. Расселла в 1834 г.

Решение уравнения Кортвега–де Вриза справедливо для описания волн только на определенном расстоянии от места образования волны. На очень больших расстояниях нелинейные волны уже не будут описываться уравнением Кортвега–де Вриза, и для описания процесса потребуется более точная модель. Поэтому уравнение Кортвега–де Ври-

за рассматривается как некоторое приближение (математическая модель), соответствующее с определенной степенью точности реальному процессу распространения волн на воде.

Достаточно долгое время работа Кортевега–де Вриза оставалась не заметной. В силу своей специфичности это открытие считалось довольно частным фактом. В то время физический мир казался линейным и принцип суперпозиции считался одним из фундаментальных принципов большинства физических теорий. Поэтому никто из исследователей не придавал открытию уединенной волны на воде серьезного значения.

Подобное отношение было связано с тем, что одна из фундаментальных физических теорий — квантовая механика — также является сугубо линейной теорией [Ландсберг, 1980]. Линеаризация позволяла добиться столь значительных технических упрощений, что практически стала считаться необходимой для получения аналитических результатов. Нелинейные теории воспринимались как несоизмеримо более сложные и не оправдывающие требуемых усилий. Предполагалось, что проще контролировать условия эксперимента так, чтобы всегда оставаться в линейном режиме.

В то же время волны на воде можно анализировать, используя хорошо известные уравнения гидродинамики, которые являются нелинейными. Поэтому и *волны на воде* в общем случае являются *нелинейными*. Только в предельном случае малых амплитуд эти волны могут считаться линейными.

Возвращение к открытию уединенной волны на воде произошло в какой-то степени случайно. Виновником этого события стал знаменитый физик-ядерщик Энрико Ферми. В 1952 г. Э. Ферми попросил двух молодых физиков С. Улама и Д. Паста решить одну из нелинейных задач на первых ЭВМ. Они должны были рассчитать колебания 64 грузиков. Создавая начальное колебание, исследователи хотели посмотреть, как эта начальная мода будет распределяться по всем другим модам. После проведения расчетов этой задачи на ЭВМ ожидаемого результата они не получили, но обнаружили, что перекачивание энергии в две или три моды на начальном этапе расчета действительно происходит, но затем наблюдается возврат к начальному состоянию. Об этом парадоксе, связанном с возвратом начального колебания, стало известно нескольким математикам и физикам. В частности, об этой задаче узнали американские физики М. Крускал и Н. Забуски [Zabusky, Kruskal, 1965], которые решили продолжить вычислительные эксперименты с моделью, предложенной Э. Ферми.

После расчетов и поиска аналогий эти ученые установили, что уравнение, которое использовали Э. Ферми, Д. Паста и С. Улам, при уменьшении расстояния между грузиками и при неограниченном росте их числа переходит в уравнение Кортевега–де Вриза. То есть по существу задача, предложенная Э. Ферми, сводилась к численному решению уравнения Кортевега–де Вриза. Примерно в те же годы было показано, что для описания ионно-звуковых волн в плазме также используется

уравнение Кортевега–де Вриза. Тогда стало ясно, что это уравнение может использоваться во многих областях физики и, следовательно, уединенная волна, которая описывается этим уравнением, является широко распространенным явлением.

Уединенные волны ведут себя как частицы, поэтому М. Крускал и Н. Забуски такие уединенные волны называли *солитонами* (от англ. solitary — уединенный). Это специальное название уединенных волн, созвучное электрону, протону и многим другим *элементарным частицам*, в настоящее время общепринято.

Открытия, связанные с уравнением Кортевега–де Вриза, не закончились открытием солитона. Следующим важным шагом, имеющим отношение к этому замечательному уравнению, было создание нового метода решения нелинейных уравнений в частных производных. Хорошо известно, что найти решения нелинейных уравнений очень сложно.

До 60-х годов прошлого столетия считалось, что такие уравнения могут иметь только некоторые частные решения, удовлетворяющие специально заданным начальным условиям. Однако уравнение Кортевега–де Вриза и в этом случае оказалось в исключительном положении.

В 1967 г. американские физики К. Гарднер, Дж. Грин, М. Крускал и Р. Миура [Gardner et al., 1967] показали, что решение уравнения Кортевега–де Вриза может быть в принципе получено для всех начальных условий. Они использовали преобразование уравнения Кортевега–де Вриза к системе двух уравнений, называемой теперь парой Лакса [Lax, 1968] (по имени американского математика Питера Лакса, внесшего большой вклад в развитие теории солитонов). Они открыли новый метод решения ряда очень важных нелинейных уравнений в частных производных. Этот метод получил название *метода обратной задачи рассеяния*, поскольку в нем существенно используется решение задачи квантовой механики о восстановлении потенциала по данным рассеяния.

Переходя к волнам на глубокой воде, отметим, что они обычно распространяются группами. Причину группирования волн удалось найти Т. Бенжамену и Дж. Фейеру [Benjamin, Feir, 1967] только в 1967 г. Теоретическими расчетами они показали, что простая периодическая волна на глубокой воде неустойчива (неустойчивость Бенжамена–Фейера), и поэтому волны на воде из-за неустойчивости разбиваются на группы. Уравнение, с помощью которого описывается распространение групп волн на воде, было получено В.Е. Захаровым в 1968 г. [Захаров, 1968]. К тому времени это уравнение уже было известно в физике и носило название нелинейного уравнения Шредингера.

В 1971 г. В.Е. Захаров и А.Б. Шабат [Захаров, Шабат, 1971] показали, что это нелинейное уравнение Шредингера имеет решения также в виде солитонов и оно может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния. Солитоны нелинейного уравнения Шредин-

гера отличаются от обсуждаемых выше солитонов Кортевега–де Вриза тем, что они соответствуют форме огибающей группы волн.

Обычно под огибающей солитона находится от 14 до 20 волн, причем средняя волна самая большая. С этим связан хорошо известный факт, что самая высокая волна в группе на воде находится между седьмой и десятой (*девятый вал*). Если в группе волн образовалось большее количество волн, то произойдет ее распад на несколько групп.

Нелинейное уравнение Шредингера, как и уравнение Кортевега–де Вриза, также имеет широкую распространенность при описании волн в различных областях физики. Это кубическое уравнение было предложено в 1926 г. выдающимся австрийским физиком Э. Шредингером для анализа фундаментальных свойств квантовых систем [Кудряшов, 1997]. Первоначально оно было использовано при описании взаимодействия внутриатомных частиц

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu|u|^2u = 0. \quad (2.2.16)$$

Обобщенное или нелинейное уравнение Шредингера описывает совокупность явлений в физике волновых процессов: эффект самофокусировки лазерного луча, распространение нелинейных волн в плазме.

Не менее популярным является также топологический солитон, который имеет занимательную историю и обширную область применений. Этот солитон появляется во всех процессах, которые описываются нелинейным уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \sin u. \quad (2.2.17)$$

Оно впервые появилось в позапрошлом веке в геометрии Н. Лобачевского при описании поверхностей постоянной отрицательной кривизны и в настоящее время называется уравнением \sin -Гордона. В 1880 г. скандинавский математик А.В. Бэкклунд показал, что это уравнение имеет специальные преобразования (преобразования Бэкклунда), позволяющие последовательно находить аналитические решения этого уравнения.

В случаях, когда нелинейные поверхностные волны в слабо диспергирующей мелкой воде не являются строго одномерными, уравнение Кортевега–де Вриза становится не приемлемым. В этом случае необходимо другое приближенное модельное уравнение, это уравнение Кадомцева–Петвиашвили:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3c}{2H} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6} c H^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.2.18)$$

Согласно Кадомцеву и Петвиашвили [Кадомцев, Петвиашвили, 1970], если зависимость от координаты y слабая, то уравнение Кортевега–де Вриза может быть уточнено добавлением малого члена. Они полу-

чили этот добавочный линейный член из рассмотрения дисперсионного соотношения для двумерных длинных волн.

Однако к тому времени значительно выросло число тех ученых, кого не пугала работа с волнами большой амплитуды. В частности, в выпуске трудов Королевского общества Британии под редакцией М. Лайтхилла [Lighthill, 1967] были опубликованы новые материалы по нелинейным волнам. Наряду с другими оригинальными результатами там приводится простой расчет нелинейной устойчивости. М. Лайтхилл выписывает уже известный усредненный лагранжиан для волн малой амплитуды на глубокой воде, затем лагранжиан для остроконечных волн максимальной амплитуды, найденной из расчетов Дж. Мичелла.

М. Лайтхилл нашел критическое значение амплитуды $a/\lambda = 0,054$, что составляет 76% от максимального значения, выше которого неустойчивость Бенжамена–Фэйра не наблюдается. Таким образом, согласно М. Лайтхиллу для неустойчивости Бенжамена–Фэйра амплитуда волны должна быть достаточно малой, а глубина достаточно большой.

В 1965 г. Дж. Уизем [Whitham, 1965], бывший студент М. Лайтхилла, сформулировал теорию о нелинейных волнах произвольной амплитуды, которые локально представляли собой стационарные волны. Дж. Уизем для вывода уравнений движения, описывающих эволюцию амплитуды и фазы медленно меняющегося цуга волн, использовал вариационный принцип усредненного по фазе лагранжиана. Некоторые частные случаи применения теории Дж. Уизема к задаче об эволюции волн на глубокой воде дали М. Лайтхилл [Lighthill, 1967], Дж. Уизем [Whitham, 1967], Г. Юэн и Б. Лэйк [Yuen, Lake, 1975]. Г. Юэн и Б. Лэйк также вывели нелинейное уравнение Шредингера, используя для этого теории Уизема.

В конце 1970-х–в начале 1980-х наблюдался достаточно бурный прогресс в численных и экспериментальных работах по нелинейной динамике волн большой амплитуды. Было проведено множество численных экспериментов для гравитационных волн большой амплитуды на поверхности глубокой воды. Исследования дали новые сведения об их форме, их устойчивости, а также о процессе опрокидывания волн, были подтверждены результаты М. Лайтхилла о предельной амплитуде.

Следует отметить работы М. Лонге-Хиггинса [Longuet-Higgins, 1966, 1978], Е. Кокелета [Cokelet, 1977], которые главным образом относятся к одномерным гравитационным волнам на поверхности. В работах М. Лонге-Хиггинса с помощью методов теории функций комплексных переменных изучено опрокидывание таких волн, имеющих симметрию.

Быстрый прогресс в исследованиях нелинейной динамики одной периодической волны расширил также представления о свойствах нелинейного волнового поля. Так как принцип линейной суперпозиции

не имеет места для нелинейных волновых полей, то переход от периодических волн весьма нетривиален. Первое систематическое исследование в этом направлении выполнил К. Хассельман [Hasselmann, 1962, 1968], который рассмотрел нелинейный перенос энергии по спектру волн в однородном океане. Он нашел, что слабый нелинейный перенос энергии происходит на временных масштабах.

Попытки численного решения нелинейных уравнений ставят вопрос об адекватности дискретного представления непрерывному. Уже давно отмечалось, что иногда результаты исследования дискретных систем не соответствуют непрерывному пределу (Ф. Брезертон [Bretherton, 1964]). Некоторые предварительные результаты Е. Капони и др. [Caponi et al., 1982], относящиеся к данному вопросу, подтверждают этот факт. В частности, Е. Капони и др. численно исследовали одномерное дискретное уравнение Захарова. Они нашли, что когда в расчетах учитывается более одной неустойчивой моды, в решении возникает явление «локализованного хаоса» в том смысле, что развитие по времени этих неустойчивых мод становится крайне нерегулярным.

Это означает, что решение может оказаться очень чувствительным к числу учитываемых в расчете мод, даже если начальные условия остаются неизменными в различных случаях. Поэтому представление волнового поля конечным числом мод становится сомнительным, когда оно претендует на информацию о непрерывной системе.

Из современных книг по описанию нелинейных волн можно отметить монографию Э. Инфельда и Дж. Роуландса [Инфельд, Роуландс, 2006]. В работе рассмотрены линейные эффекты, линейная дисперсия волн, типичные неустойчивости. Далее рассмотрено влияние нелинейности и выведены ключевые нелинейные модели: уравнение Кортевега–де Вриза, его двумерное обобщение в виде уравнения Кадомцева–Петвиашвили, нелинейное уравнение Шредингера. В основном для этих уравнений строятся решения в виде нелинейных волн и солитонов.

2.3. Исследование поверхностных гравитационных волн

Основные уравнения. Для описания поверхностных гравитационных волн будем пользоваться методикой, приведенной в книге Бреховских Л.М. и Гончарова В.В. [Бреховских, Гончаров, 1982]. Эта одна из редких книг, где при выводе уравнений используется строгая математика. При возмущении плоской свободной поверхности жидкости в гравитационных волнах возвращающей силой является сила тяжести. В граничном условии (1.6.7) ее влияние описывается членом $g\rho_0(0)\zeta$, равным давлению столба жидкости высотой ζ . Исключим в наших уравнениях действие сил поверхностного натяжения, силы Кориолиса, архимедовых сил, положив для этого $\sigma = 0$, $\Omega = 0$, $\rho_0 = \text{const}$ ($N^2 = 0$,

$\rho = 0$) соответственно, и введем обозначения: $\mathbf{u} \equiv \{u, v\}$ — горизонтальная компонента скорости частиц, $\nabla_- = e_x \partial / \partial x + e_y \partial / \partial y$.

Тогда из (1.6.11) получаем уравнения для гравитационных поверхностных волн:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\nabla_- p}{\rho_0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \nabla_- \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.3.1)$$

Из этих уравнений можно исключить горизонтальную скорость \mathbf{u} и давление p , выразив последние через вертикальную компоненту скорости частиц w :

$$\frac{\partial \nabla_- \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla_- \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}, \quad \nabla_- p = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}, \quad (2.3.2)$$

и для w получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta w = 0. \quad (2.3.3)$$

Граничное условие для w на свободной поверхности $z = 0$ легко следует из (1.6.7), где $\sigma = 0$ и p берется из (2.3.2):

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - g \Delta_- w \right)_{z=0} = 0. \quad (2.3.4)$$

Кроме того, предполагая на уровне $z = -H$ наличие границы жидкости с абсолютно твердым дном (рис. 2.3.1), добавим еще условие равенства нулю нормальной (вертикальной) компоненты скорости частиц жидкости при $z = -H$:

$$w|_{z=-H} = 0. \quad (2.3.5)$$

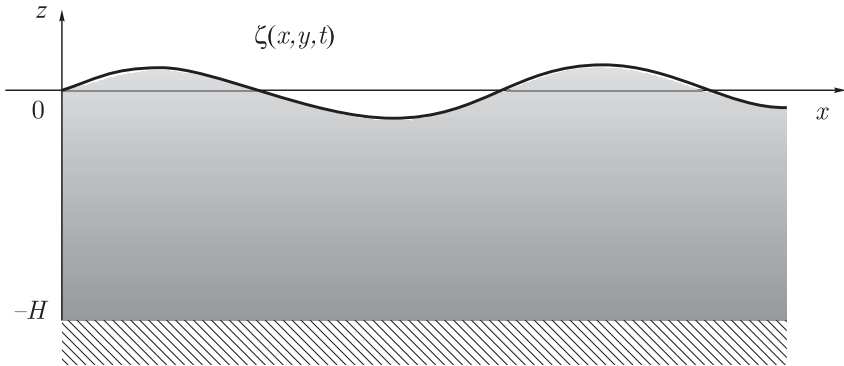


Рис. 2.3.1. Геометрия границ

Гармонические волны. Будем искать решение уравнения (2.3.3), удовлетворяющее граничным условиям (2.3.4) и (2.3.5), в виде распространяющейся в горизонтальном направлении гармонической волны:

$$w(x, y, z, t) = \Phi(z) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.3.6)$$

где $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ — волновой вектор; $\mathbf{r} = \{x, y\}$. Подставив это выражение в (2.3.3)–(2.3.5), получаем краевую задачу для функции $\Phi(z)$:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - k^2\Phi = 0, \quad \left(\frac{d\Phi}{dz} - \frac{gk^2}{\omega^2}\Phi \right)_{z=0} = \Phi(-H) = 0.$$

Граничное условие при $z = -H$ удовлетворяется, если выбрать решение уравнения для Φ в виде

$$\Phi(z) = b \frac{\text{sh } k(z+H)}{\text{sh } kH}. \quad (2.3.7)$$

Подстановка последнего в граничное условие при $z = 0$ показывает, что волна (2.3.6) существует не при произвольных значениях k и ω , а только при удовлетворяющих дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kH. \quad (2.3.8)$$

Отсюда следует, что фазовая скорость гравитационной поверхностной волны зависит от частоты (волнового числа):

$$c_\Phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH} \times \sqrt{\operatorname{th} kH/kH}. \quad (2.3.9)$$

Следовательно, гравитационная поверхностная волна распространяется с дисперсией, что, в частности, приводит к изменению формы негармонической поверхностной волны. Тогда групповая скорость гравитационной поверхностной волны, т. е. скорость распространения огибающей спектрально узкого волнового пакета, будет определяться выражением

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_\Phi}{2} \left(1 + \frac{kH}{\operatorname{th} kH} - kH \operatorname{th} kH \right). \quad (2.3.10)$$

Отсюда следует, что групповая скорость также зависит от волнового числа k . Смещение поверхности $\zeta(x, y, t)$ определяется из граничного условия (1.6.7)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -i\omega \zeta = w|_{z=0} = b \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$$

откуда

$$\zeta = a \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad a = \frac{ib}{\omega}. \quad (2.3.11)$$

Пульсации давления на произвольной глубине z , обусловленные волновым движением, найдутся из (2.3.2), откуда с учетом $\Delta_- = -k^2$ получаем

$$p = \rho_0 \frac{i\omega}{k \operatorname{th} kH} b \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (2.3.12)$$

Если воспользоваться дисперсионным соотношением (2.3.8), то последнее выражение можно записать и в таком виде:

$$p = \rho_0 g \frac{ib}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] = \rho_0 g a \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)].$$

Далее, из уравнений (2.3.2) легко находится горизонтальная скорость частиц жидкости в волне

$$\mathbf{u} = i \frac{\mathbf{k}}{k} b \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.3.13)$$

направление которой совпадает с направлением распространения волны \mathbf{k} .

Если обозначить через ξ горизонтальное смещение частиц жидкости ($d\xi/dt = -i\omega\xi = \mathbf{u}$), также совпадающее с направлением k , и соответственно через η — вертикальное смещение частиц ($d\eta/dt = -i\omega\eta = w$), то, положив $b = \omega A \exp[i(\alpha - \pi/2)]$ ($a = A \exp(i\alpha)$, A — амплитуда смещений свободной поверхности) и выделяя вещественные части, получаем:

$$\begin{aligned} \xi &= -A \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha), \\ \eta &= A \frac{\operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Исключая теперь зависимость от t , находим траектории движения частиц жидкости в гравитационной поверхностной волне:

$$\frac{\xi^2}{a_\xi^2} + \frac{\eta^2}{a_\eta^2} = 1, \quad a_\xi = A \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}, \quad a_\eta = A \frac{\operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}, \quad (2.3.14)$$

являющиеся *эллипсами* с отношением полуосей $a_\eta/a_\xi = \operatorname{th} k(z+H)$.

В случае стоячей поверхностной волны, образованной двумя бегущими волнами типа (2.3.6) с одинаковыми частотами ω и амплитудами b , но с противоположно направленными волновыми векторами \mathbf{k} , имеем

$$w = 2b \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}) \exp(-i\omega t).$$

Аналогичный расчет смещений частиц приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} \xi &= 2A \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}) \cos(\omega - \alpha t), \\ \eta &= -2A \frac{\operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}) \cos(\omega - \alpha t). \end{aligned}$$

При этом траекториями частиц будут *прямые линии*

$$\eta = -\operatorname{th} k(z+H) \operatorname{ctg}(\mathbf{k}\mathbf{r}) \xi, \quad (2.3.15)$$

наклон которых зависит как от вертикальной координаты z , так и от горизонтальных x , y координат. Отсюда видно, что при $\mathbf{k}\mathbf{r} = 0, \pm\pi; \pm 2\pi, \dots$ частицы движутся по вертикальным прямым, а при $\mathbf{k}\mathbf{r} = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$ — по горизонтальным.

На основании выражений для скоростей частиц жидкости (2.3.6) с учетом (2.3.7) и (2.3.13) нетрудно убедиться, что $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, т.е.

движение в поверхностной волне является потенциальным: $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, где

$$\varphi = \frac{b}{k} \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (2.3.16)$$

Приближения мелкой и глубокой воды. Обычно в теории гравитационных поверхностных волн рассматривают два крайних случая, различающихся соотношением между H и длиной волны $\lambda = 2\pi/k$.

1) *Мелкая вода*, т. е. $H/\lambda \ll 1$ ($kH \ll 1$). При этом в (2.3.8) и (2.3.9) имеем $\operatorname{th} kH \approx kH$, в результате:

$$\omega = \sqrt{gH}k, \quad c_\Phi = \sqrt{gH}. \quad (2.3.17)$$

Дисперсия волн отсутствует ($c_\Phi = \text{const}$). Для компонент скорости из (2.3.7) и (2.3.13) в том же приближении имеем:

$$w = b(1 + \frac{z}{H}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad \mathbf{u} = i \frac{\mathbf{k}}{k} b \frac{\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]}{kH}. \quad (2.3.18)$$

Отсюда, в частности, следует, что $|\mathbf{u}| \gg |w|$, т. е. скорость практически постоянна по сечению жидкого слоя и направлена параллельно дну. Этот факт также легко установить, анализируя траектории (2.3.14). Отношение полуосей эллипса $a_\eta/a_\xi = k(z+H) < kH \ll 1$, так что частицы жидкости в поверхностной волне на мелкой воде движутся по сильно вытянутым вдоль горизонтальной оси эллиптическим орбитам.

2) *Глубокая вода*, $H/\lambda \gg 1$ ($kH \gg 1$). В этом случае в (2.3.8) следует положить $\operatorname{th} kH \approx 1$, что приводит к *дисперсионному соотношению* для волн на *глубокой* воде:

$$\omega^2 = gk. \quad (2.3.19)$$

Для фазовой и групповой скоростей находим:

$$c_\Phi = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{\omega}, \quad c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{c_\Phi}{2}. \quad (2.3.20)$$

Из выражений (2.3.6), (2.3.7), (2.3.12) и (2.3.13), пренебрегая всюду величинами $\exp(-kH)$ по сравнению с единицей, получаем:

$$\begin{aligned} w &= b \exp(kz) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \\ \mathbf{u} &= i \frac{\mathbf{k}}{k} b \exp(kz) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \\ p &= \rho_0 \frac{i\omega}{k} b \exp(kz) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Таким образом, все возмущения жидкости в поверхностной волне на глубокой воде экспоненциально убывают при углублении. Волновое движение практически отсутствует уже на глубине порядка длины волны λ . Для траекторий движения частиц жидкости (2.3.14) имеем $a_\xi = a_\eta = A \exp(kz)$, что дает $\xi^2 + \eta^2 = A^2 \exp(2kz)$ — окружности, радиус которых экспоненциально убывает с глубиной.

Любой заданный слой жидкости глубиной H в зависимости от длины распространяющихся волн может быть как мелкой, так и глубокой водой. Очень длинные волны всегда распространяются без дисперсии. Примером таких волн могут служить приливные волны или волны цунами в океане. Дисперсионное соотношение (2.3.8) удобно изображать графически (рис. 2.3.2), где хорошо заметны линейный бездисперсионный участок в окрестности начала координат (длинные волны) и далее дисперсия, соответствующая при $kH \gg 1$ волнам на глубокой воде.

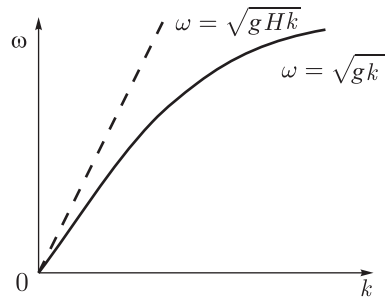


Рис. 2.3.2. Дисперсионное соотношение для мелкой и глубокой воды

Энергия волн. Величину энергии волны любого вида обычно определяют как превышение энергии некоторого объема жидкости, возмущенного волной, над ее величиной в состоянии покоя. В случае поверхностных волн в качестве объема удобно выбрать столб жидкости, ограниченный в вертикальном направлении плоскостью $z = -H$ и свободной поверхностью, а в направлении движения волны, которое мы примем совпадающим с осью x , — двумя плоскостями: $x = x_0$, $x = x_0 + \lambda$ (λ — длина волны), в поперечном направлении аналогичные плоскости отстоят друг от друга на единицу длины. При этом для кинетической энергии нашего объема имеем

$$E_k = \frac{\rho_0}{2} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} \int_{-H}^0 v^2 dx dz.$$

Квадрат скорости частиц жидкости с учетом выражений (2.3.6), (2.3.7) и (2.3.13) запишем в виде

$$v^2 = B^2 \frac{\operatorname{sh}^2 k(z+H)}{\operatorname{sh}^2 kH} \cos^2(kx - \omega t + \alpha') + B^2 \frac{\operatorname{ch}^2 k(z+H)}{\operatorname{sh}^2 kH} \cos^2(kx - \omega t + \alpha' + \frac{\pi}{2}),$$

где $B \exp(i\alpha') = b$. Напомним, что при вычислении квадратичной величины v^2 нужно учитывать только вещественную часть комплексных выражений. Возвращаясь к вычислению кинетической энергии, замечаем, что

$$\int_{x_0}^{x_0+\lambda} \cos^2 \left[\frac{2\pi x}{\lambda} - f(t) \right] dx = \frac{\lambda}{2},$$

где $f(t)$ — произвольная функция. Поэтому

$$E_k = \frac{\rho_0 \lambda}{4} \frac{B^2}{\operatorname{sh}^2 kH} \int_{-H}^0 [\operatorname{sh}^2 k(z+H) + \operatorname{ch}^2 k(z+h)] dz =$$

$$= \frac{\rho_0 \lambda}{4} \frac{B^2}{\operatorname{sh}^2 kH} \int_{-H}^0 \operatorname{ch}[2k(z+H)] dz,$$

и окончательно после интегрирования получаем

$$E_k = \frac{\rho_0}{4} \frac{B^2}{k \operatorname{th} kH} = \frac{\rho_0 \lambda g}{4} \frac{B^2}{\omega^2} = \frac{\rho_0 \lambda g}{4} A^2. \quad (2.3.22)$$

Здесь учтено дисперсионное соотношение (2.3.8) и вместо $B = |b|$ использована амплитуда смещений свободной поверхности $A = |a|$.

Аналогично для приращения потенциальной энергии имеем

$$E_n = \int_0^\lambda \left(\int_{-H}^\zeta \rho_0 g z dz - \int_{-H}^0 \rho_0 g z dz \right) dx = \rho_0 g \int_0^\lambda \int_0^\zeta g z dz = \frac{\rho_0 g}{2} \int_0^\lambda \zeta^2 dx.$$

Подставляя в интеграл вместо t вещественную часть выражения (2.3.11) $A \cos(kx - \omega t + \alpha)$ и интегрируя, получаем

$$E_n = \frac{\rho_0 \lambda g}{4} A^2 = E_k. \quad (2.3.23)$$

Таким образом, *кинетическая и потенциальная энергии в бегущей поверхностной волне равны друг другу и постоянны во времени.*

Гравитационно-капиллярные волны на поверхности жидкости

Чисто капиллярные волны. Рассмотрим волны, обусловленные силами поверхностного натяжения. Действие этих сил описывается членом $-\sigma \Delta_\xi$ в граничном условии (1.6.7). Исключая волновые движения других типов ($\rho_0 = \text{const}$, $N^2 = 0$, $\Omega = 0$, $g = 0$) в (1.6.7) и (1.6.11), вновь получим уравнение (2.3.3) для вертикальной компоненты скорости. Однако граничное условие на невозмущенной свободной поверхности $z = 0$ будет уже другим. А именно: положив во втором уравнении (1.6.7) $g = 0$ и действуя на него оператором $\partial \Delta_- / \partial t$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_- p|_{z=0} = -\sigma \Delta_- \Delta_- \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Отсюда, выражая $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ через w с учетом первого условия (1.6.7) и $\Delta_- p$ из справедливого и в этом случае соотношения (2.3.2), находим

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} + \gamma \Delta_- \Delta_- w \right)_{z=0} = 0, \quad \text{где } \gamma = \sigma / \rho_0. \quad (2.3.24)$$

Капиллярные волны являются высокочастотными волнами с малой длиной волны. Поэтому в практических задачах можно полагать $kH \rightarrow \infty$, как в случае бесконечно глубокой жидкости. Решения уравнения (2.3.3) при этом должны обращаться в нуль при $z \rightarrow -\infty$. Если искать решение в виде гармонической волны (2.3.6), то для $\Phi(z)$ и $w(x, y, z, t)$ будем иметь:

$$\Phi(z) = b \exp(kz), \quad w = b \exp(kz) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)].$$

Подставив w в граничное условие (2.3.24), получим *дисперсионное соотношение для капиллярных волн*:

$$\omega^2 = \gamma k^3. \quad (2.3.25)$$

При этом фазовая и групповая скорости волн равны:

$$c_\Phi = \sqrt{\gamma k}, \quad c_{\text{гр}} = \frac{3}{2} \sqrt{\gamma k} = \frac{3}{2} c_\Phi. \quad (2.3.26)$$

Выражения для давления p и горизонтальной компоненты скорости \mathbf{u} совпадают с соответствующими выражениями для гравитационных волн на глубокой воде (2.3.21). Поэтому и траектории частиц жидкости в капиллярной волне являются окружностями.

Гравитационно-капиллярные волны. Учет теперь совместное действие сил тяжести и поверхностного натяжения. В однородной ($\rho_0 = \text{const}$), несжимаемой ($c^2 = \infty$) и невращающейся ($\Omega = 0$) жидкости остаются справедливыми уравнения (2.3.1)–(2.3.3), граничное условие (2.3.5), а также решения (2.3.6), (2.3.7), (2.3.11)–(2.3.13) в виде гармонических волн. Все отличие от рассмотренных выше случаев заключается в использовании полного динамического граничного условия для p на свободной поверхности (1.6.7), которое для w будет комбинацией условий (2.3.26) и (2.3.47):

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - g \Delta_- w + \gamma \Delta_- \Delta_- w \right)_{z=0} = 0.$$

Соответственно с этим изменится только дисперсионное соотношение для волн

$$\omega^2 = (gk + \gamma k^3) \text{th } kH. \quad (2.3.27)$$

Отсюда находим квадрат фазовой скорости

$$c_\Phi^2 = (g/k + \gamma k) \text{th } kH. \quad (2.3.28)$$

В частности, для волн на глубокой воде ($kH \gg 1$) имеем:

$$\omega^2 = gk + \gamma k^3, \quad c_\Phi^2 = g/k + \gamma k. \quad (2.3.29)$$

При малых k (длинные волны) основным в правой части является первый член, и мы имеем уже исследованный выше случай гравитационных волн (2.3.8). Фазовая скорость падает с ростом k . Напротив, при больших k (короткие волны) в (2.3.29) следует удерживать лишь

второй член — капиллярные волны. Фазовая скорость растет с увеличением k . При некотором $k = k_0 = 2\pi/\lambda_0$ фазовая скорость волны будет минимальна. Приравняв нулю производную от правой части второго уравнения (2.3.29), находим:

$$k_0 = \sqrt{g/\gamma}, \quad \lambda_0 = 2\pi\sqrt{\gamma/g}, \quad (c_\phi)_{\min} = \sqrt{2}(g\gamma)^{1/4}. \quad (2.3.30)$$

Для границы вода—воздух, для которой $\gamma \approx 73 \text{ см}^3/\text{с}^2$ получим $\lambda_0 = 1,714 \text{ см}$, соответствующая частота $f_0 = (c_\phi)_{\min}/\lambda_0 = 13,5 \text{ Гц}$ и $(c_\phi)_{\min} = 23,1 \text{ см/с}$.

Отметим, что длина волны λ_0 является граничной, разделяющей гравитационные и капиллярные волны. При $\lambda \gg \lambda_0$ преобладают гравитационные силы, при $\lambda \ll \lambda_0$ — капиллярные.

Для групповой скорости гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде ($kH \gg 1$), дифференцируя (2.3.29) по k , имеем

$$2\omega c_{\text{гр}} = g + 3\gamma k^2,$$

следовательно,

$$c_{\text{гр}} = \frac{g + 3\gamma k^2}{2\omega} = \frac{c_\phi}{2} \frac{g/\gamma + 3k^2}{g/\gamma + k^2} = \frac{c_\phi}{2} \frac{k_0^2 + 3k^2}{k_0^2 + k^2}. \quad (2.3.31)$$

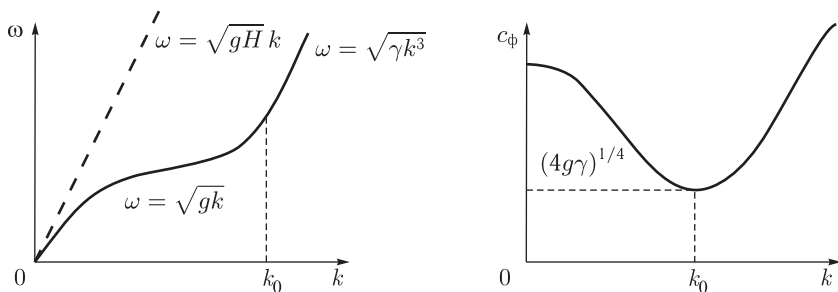


Рис. 2.3.3. Дисперсионная зависимость для гравитационно-капиллярных волн

Отсюда получаем, как это и должно быть, для гравитационных волн ($k_0 \gg k$) выражение (2.3.10) при $kH \gg 1$, а для капиллярных $k_0 \ll k$ — выражение (2.3.49). На рис. 2.3.3 дано схематическое изображение дисперсионных зависимостей $\omega(k)$ и $c_\phi(k)$ для гравитационно-капиллярных волн.

2.4. Основные параметры поверхностных гравитационных волн на мелководье

Поверхность моря всегда покрыта волнами, длины которых могут составлять от миллиметров (капиллярный диапазон) до километров (гравитационные волны). Учитывая наибольшую энергоемкость, рас-

смотрим основные параметры поверхностных гравитационных волн в мелководных районах типа Азовского моря. В нашем случае волны имеют бесконечно малую амплитуду, следовательно, рассмотрение является *линейным*. Считаем также, что поверхностные волны являются свободными, т.е. влиянием ветра пренебрегаем. Для выполнения условия мелководности длины гравитационных волн в 2–3 раза превышают среднюю глубину Азовского моря ($H = 10$ м).

Для выявления особенностей поведения поверхностных гравитационных волн проведем исследование их основных параметров. Длину волн определяем с помощью выражений для мелкой воды (2.3.17):

$$\omega = \sqrt{gH}k, \quad c_{\Phi} = \sqrt{gH},$$

при глубине 10 м скорость распространения поверхностных гравитационных волн равна 9,9 м/с, исходя из условия мелководности $H/\lambda \ll 1$, длина волны должна быть выше 33 м, эта длина соответствует частоте 0,3 Гц.

На рис. 2.4.1 и 2.4.2 представлены графики функций возвышения $\zeta(x)$, горизонтальной $u(x)$ и вертикальной $w(x)$ скоростей, давления $p(x)$ для пакета волн при: $f = 0,3; 0,33$ Гц; $\lambda = 33; 30$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с (волновой параметр первой волны $k_1 \times H = 1,9$), согласно формулам (2.3.11), (2.3.13), (2.3.6) и (2.3.12):

$$\begin{aligned} \zeta &= a \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad a = ib/\omega, \\ \mathbf{u} &= i \frac{\mathbf{k}}{k} b \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \\ w(x, y, z, t) &= \Phi(z) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad \Phi(z) = b \frac{\operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}, \\ p &= \rho_0 \frac{i\omega}{k \operatorname{th} kH} b \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \end{aligned}$$

Для расчетов пакет волн был взят потому, что обычно на поверхности моря распространяется группа волн.

На рис. 2.4.3 представлены графики горизонтальной $u(x)$ и вертикальной скоростей $w(x)$ для меньшего значения глубины и лучшего выполнения условия мелководности $k_1 \times H = 0,33$. Графики подтверждают тот вывод, который следует из выражения (2.3.18) для горизонтальной и вертикальной скоростей:

$$\begin{aligned} w &= b(1 + \frac{z}{H}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \\ \mathbf{u} &= i \frac{\mathbf{k}\mathbf{r}}{k} b \frac{\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]}{kH}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что $|u| \gg |w|$, при более мелкой воде (в нашем случае длина волны почти в 20 раз превышает глубину, частотный набор оставляем постоянным) скорость постоянна по сечению жидкого слоя и параллельно дну, горизонтальная скорость превышает вертикальную в 2,5 раза.

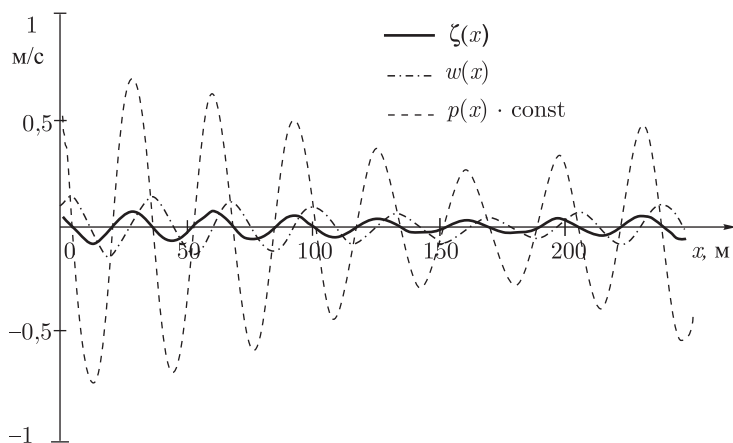


Рис. 2.4.1. Графики функций возвышения $\zeta(x)$, вертикальной скорости $w(x)$ и давления $p(x)$ для пакета волн со следующими параметрами: $f = 0,3; 33$ Гц; $\lambda = 33; 30$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с

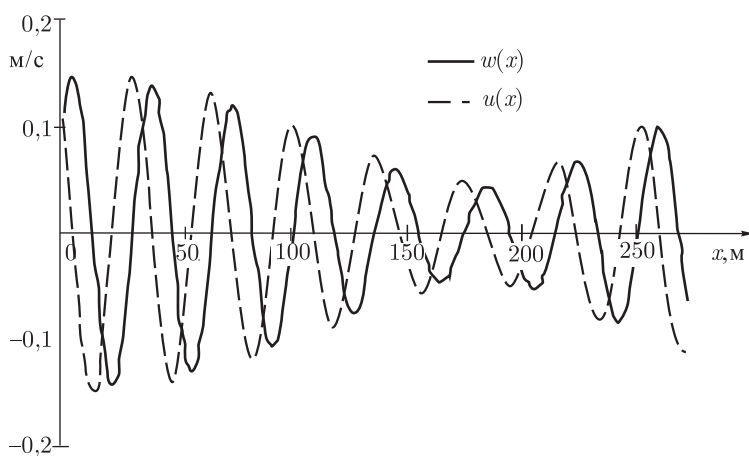


Рис. 2.4.2. Графики вертикальной $w(x)$ и горизонтальной $u(x)$ скоростей для пакета волн со следующими параметрами: $f = 0,3; 0,33$ Гц; $\lambda = 33; 30$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с; волновой параметр $k_1 \times H = 1,9$

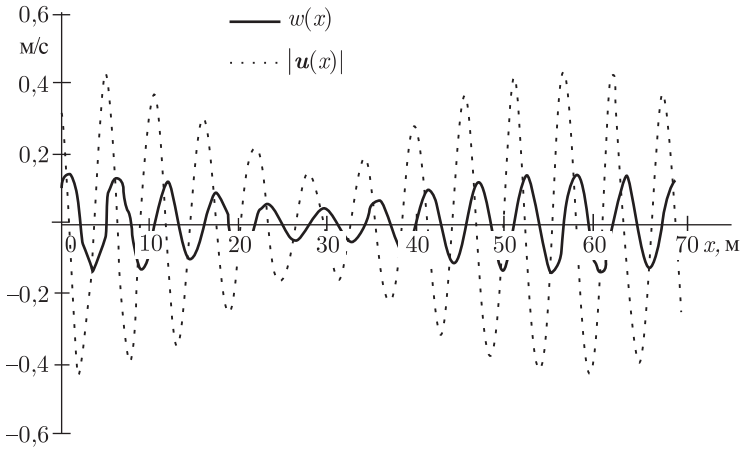


Рис. 2.4.3. Графики вертикальной $w(x)$ и горизонтальной $u(x)$ для пакета волн со следующими параметрами: $f = 0,3$; 33 Гц; $\lambda = 5,7$; 5,2 м; $H = 0,3$ м; $c = 1,7$ м/с; волновой параметр $k_1 \times H = 0,33$

На рис. 2.4.4 показано уменьшение давления гравитационной волны с глубиной, согласно формуле (2.3.12). На глубине, равной четверти длины волны, давление уменьшается в 4 раза.

На рис. 2.4.5 приведены графики вертикальной скорости гравитационной стоячей волны $w_{st}(x)$ при: $f = 0,3$ Гц; $\lambda = 33$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с, ($w(x)$ — бегущая волна), рассчитанные по формуле для стоячей поверхностной волны

$$w = 2b \frac{\operatorname{ch} k(z + H)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\mathbf{kr}) \exp(-i\omega t).$$

В стоячей поверхностной волне пучности и узлы чередуются через пол длины волны (по сравнению с бегущей).

На рис. 2.4.6 представлены зависимости скорости распространения гравитационной волны от волнового числа k для наших условий, рассчитанные по формуле (2.3.9):

$$c_\Phi = \omega/k = \sqrt{gH} \sqrt{\operatorname{th} kH/kH}$$

и (2.3.17).

При увеличении длины волны в начале координат скорость стремительно падает и стабилизируется около значения $0,5 \div 1$ м/с.

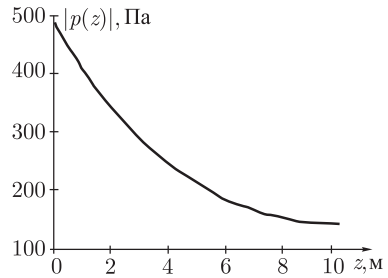


Рис. 2.4.4. График зависимости $p(x)$ для гравитационной волны со следующими параметрами: $f = 0,3$ Гц; $\lambda = 33$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с

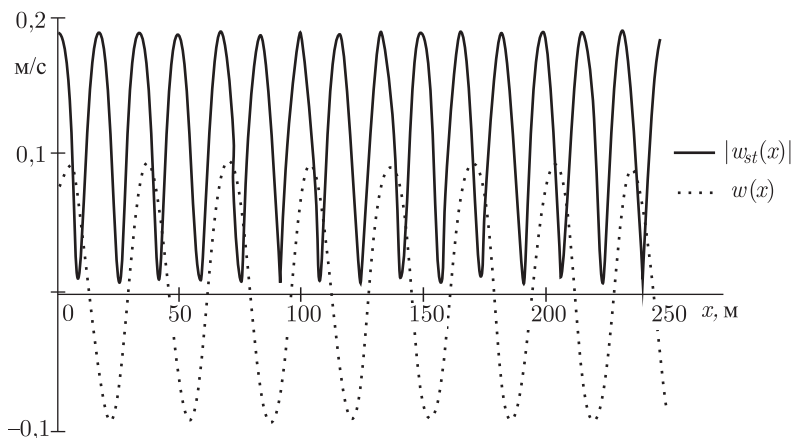


Рис. 2.4.5. Графики вертикальной скорости гравитационной стоячей волны $w_{st}(x)$ при: $f = 0,3$ Гц; $\lambda = 33$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с; $k_1 \times H = 1,9$ ($w(x)$ — бегущая волна)

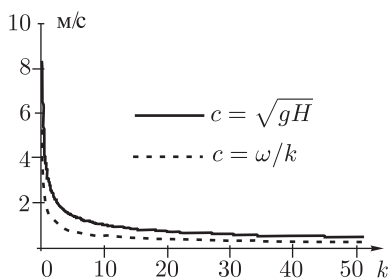


Рис. 2.4.6. График зависимости скорости распространения гравитационной волны от волнового числа k

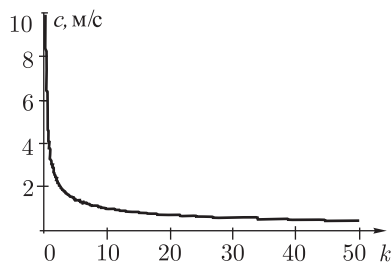


Рис. 2.4.7. График зависимости скорости распространения гравитационно-капиллярной волны от волнового числа k (минимальная скорость $c = 0,23$ м/с)

На рис. 2.4.7 и 2.4.8 приведены графики зависимостей скорости распространения гравитационно-капиллярной и капиллярной волн от волнового числа k по формулам (2.3.26) и (2.3.28):

$$\text{для капиллярных волн } c_{\text{ф}} = \sqrt{\gamma k}, c_{\text{гп}} = 3/2 \sqrt{\gamma k} = 3/2 c_{\text{ф}};$$

$$\text{для гравитационно-капиллярных волн } c_{\text{ф}}^2 = (g/k + \gamma k) \operatorname{th} kH.$$

Скорость гравитационно-капиллярной волны приближается к минимальному значению 0,23 м/с, а скорость капиллярной волны с увеличением волнового числа возрастает.

На рис. 2.4.9 представлены траектории движения частиц в гравитационной волне ($\xi(x)$ — горизонтальное и $\eta(x)$ — вертикальное

смещения) при: $f = 0,3$ Гц; $\lambda = 33$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с z от 0 до 9,99 м, рассчитанные по формуле (2.3.14):

$$\frac{\xi^2}{a_\xi^2} + \frac{\eta^2}{a_\eta^2} = 1,$$

где

$$a_\xi = A \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}, \quad a_\eta = A \frac{\operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}.$$

С увеличением глубины z траектория движения частиц из первоначальной окружности на поверхности превращается у дна в прямую линию, параллельную дну. Следовательно, амплитуды вертикального и горизонтального смещений уменьшаются с глубиной с разной скоростью. Приведенные графики достаточно хорошо показывают динамику движения частиц в гравитационной волне.

На рис. 2.4.10 показаны траектории движения частиц в стоячей гравитационной волне, рассчитанные по формуле

$$\eta = -\operatorname{th} k(z+H) \operatorname{ctg}(\mathbf{kr})\xi. \quad (2.4.1)$$

В направлении углов $0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots$ частицы движутся по вертикальным прямым, а в направлении углов $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2 \dots$ — по горизонтальным прямым.

Определение частоты собственных колебаний несжимаемой жидкости в Таганрогском заливе (бассейн с глубиной $H = 5$ м с прямоугольным горизонтальным сечением длиной $L = 150\,000$ м и шириной $D = 30\,000$ м).

Во время штормов в заливе могут образовываться гравитационные волны, частоты которых будут совпадать с собственными частотами самого залива (явление сулоя), так как любой жидкий сосуд с ограниченными пространственными размерами будет иметь собственные частоты. В этом случае, войдя в резонанс, эти волны могут привести к разрушительным последствиям в береговой зоне. Для нашего случая считаем стенки бассейна жесткими. Найдем наименьшую частоту колебаний.

Общим гармоническим решением уравнения (2.3.3) для волн в бассейне будет функция $w = b\Phi(z) \exp(-i\omega t)f(x, y)$, где $f(x, y)$ — комбинация экспонент вида

$$\exp[i(\pm k_x x \pm k_y y)], \quad \omega^2 = gk \operatorname{th} kH.$$

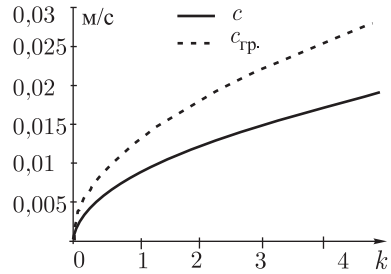


Рис. 2.4.8. График зависимости фазовой и групповой скорости распространения капиллярной волны от волнового числа k при $f = 13,5$ Гц; $\lambda = 1,714$ см; $k = 3,7$

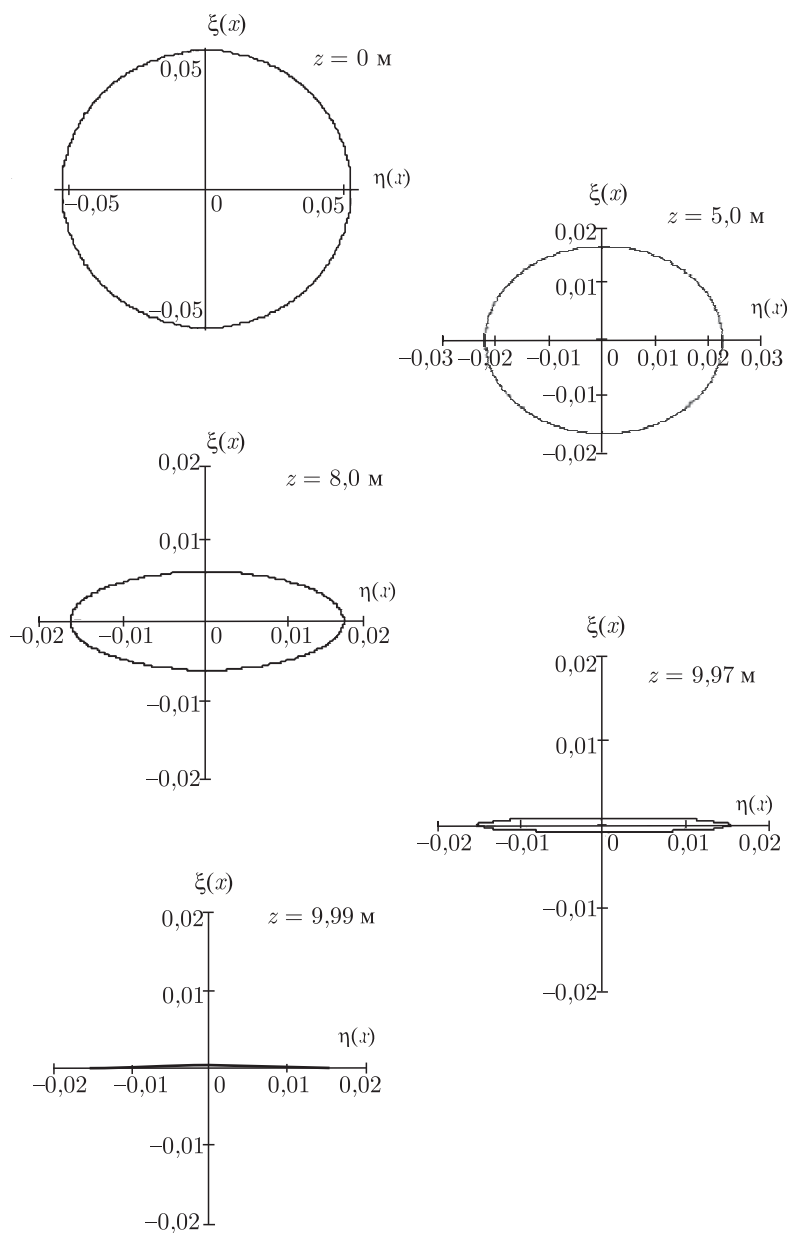


Рис. 2.4.9. Траектории движения частиц в гравитационной волне в зависимости от глубины z ($\xi(x)$ — горизонтальное и $\eta(x)$ — вертикальное смещения) при $f = 0,3$ Гц; $\lambda = 33$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с

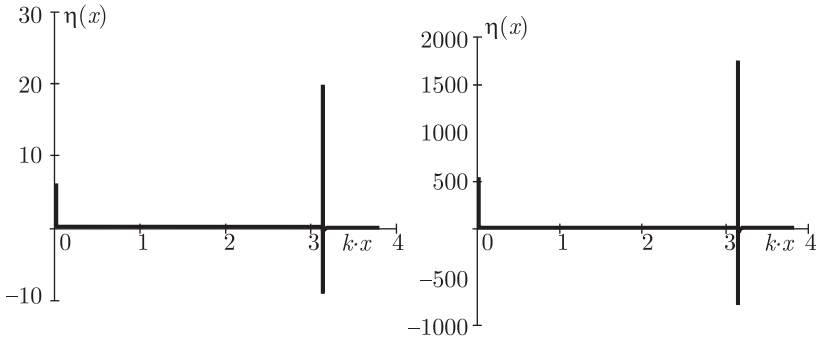


Рис. 2.4.10. Траектории движения частиц в гравитационной волне в зависимости от глубины z при $f = 0,3$ Гц; $\lambda = 33$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с

Коэффициент отражения поверхностных волн от вертикальных жестких границ равен единице. Следовательно, $w(x, y, z, t)$ будет иметь вид стоячих волн как по x , так и по y . При этом, если положить $f(x, y) = \cos k_x x \cos k_y y$, то нормальные к стенкам бассейна $x = 0$ и $y = 0$ составляющие скорости частиц

$$u_x = k^{-2} \partial^2 w / \partial x \partial z \text{ и } u_y = k^{-2} \partial^2 w / \partial y \partial z$$

обратятся в нуль. Потребовав, чтобы эти скорости обращались в нуль на противоположных стенках $u_x|_{x=L} = 0$ и $u_y|_{y=D} = 0$, получаем

$$\sin k_x L = 0, \quad (k_x)_n = n\pi/L \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

и

$$\sin k_y D = 0, \quad (k_y)_m = m\pi/D \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда для волновых векторов и частот собственных колебаний имеем:

$$k_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{D^2}} \quad \omega_{nm}^2 = g k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} H.$$

Положив для определенности $L > D$, найдем наименьшую частоту

$$\omega_{\min}^2 = \omega_{10}^2 = (g\pi/L) \operatorname{th}(\pi H/L) \quad (k_{\min} = k_{10} = \pi/L).$$

Для Таганрогского залива с размерами $H = 5$ м, $L = 150$ км находим

$$f_{\min} = 1,47 \times 10^{-4} \text{ Гц}.$$

Возбуждение поверхностных волн с такой частотой в Таганрогском заливе приведет к возникновению явления суоя.

2.5. Пространственное моделирование волновых явлений на поверхности мелководья

Для исследования волновых процессов, происходящих в мелководных акваториях, рассмотрим пространственные трехмерные модели некоторых волновых явлений на поверхности мелководья в линейном случае.

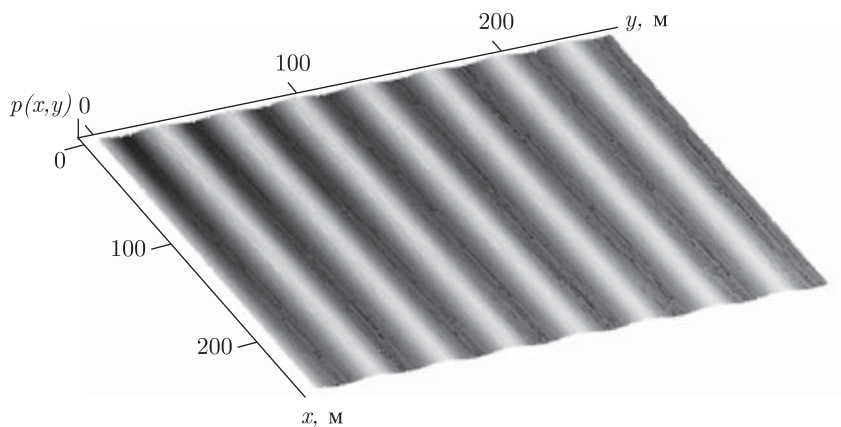


Рис. 2.5.1. Пространственная модель поверхностной гравитационной волны при $f = 0,3$ Гц; $\lambda = 33$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с

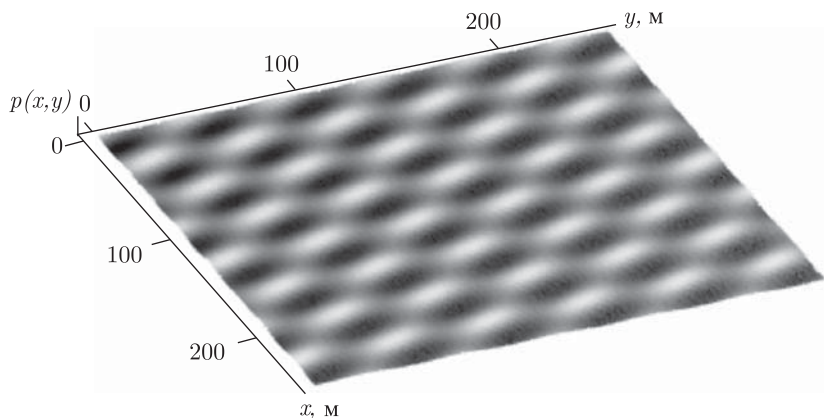


Рис. 2.5.2. Пространственная модель наложения двух поверхностных гравитационных волн при $f = 0,3$ Гц; $\lambda = 33$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с, $\theta = 0^\circ$ и 45°

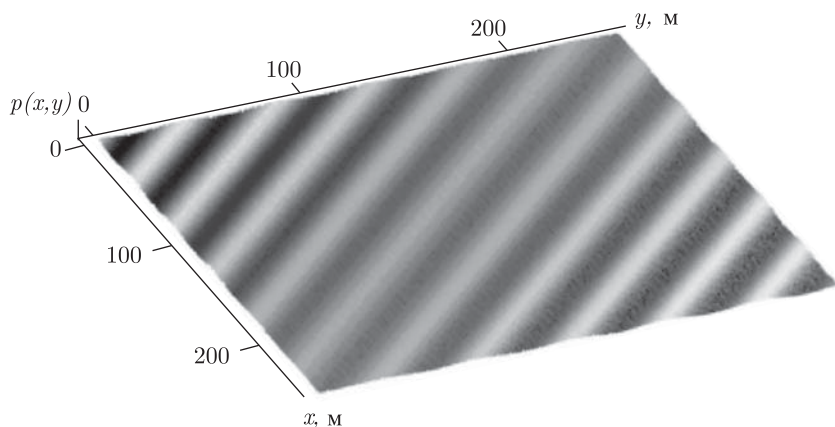


Рис. 2.5.3. Пространственная модель пакета поверхностных гравитационных волн для $f = 0,3, 0,33$ Гц; $\lambda = 33, 30$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с, $\theta = 45^\circ$

На рис. 2.5.1 и 2.5.2 приведены пространственные модели распространения поверхностной гравитационной волны, а также наложения этих волн на мелководье. Графики приведены для единичного уровня амплитуды давления на основе выражения (2.3.12). Наложение двух волн моделирует ситуацию, когда на поверхности моря существуют волны, пришедшие с разных направлений или как стоячая волна при отражении от твердой вертикальной скалы. В результате наложения на поверхности образуются отдельные трехмерные ячейки.

На рис. 2.5.3 представлена пространственная модель пакета поверхностных гравитационных волн, распространяющегося под углом $\theta = 45^\circ$ к оси y .

На рис. 2.5.4 представлена пространственная модель наложения двух пакетов, приходящих под углами 45° и 90° к оси x . Здесь, мы снова наблюдаем отдельные трехмерные ячейки, однако, их расположение уже отличается от предыдущего случая. Появляются некоторые локальные области с пониженным уровнем ячеек. Пространственно трехмерные модели были созданы методом плоско-параллельного переноса исходного поля давления вдоль оси y [Лаврентьев, 1973].

Для моделирования волновых явлений, возникающих при подходе поверхностных гравитационных волн к берегу, а точнее явления *рефракции* — искажения фронта волны — создадим трехмерные модели береговых образований. Смоделируем с помощью аналитических функций мыс, бухту и ровную береговую линию.

На рис. 2.5.5 представлена модель трехмерного мыса с размерами $250 \times 250 \times 10$ м (масштаб по оси z увеличен). Она описывается аналитическим выражением

$$z(x, y) = axy \sin(xy). \quad (2.5.1)$$

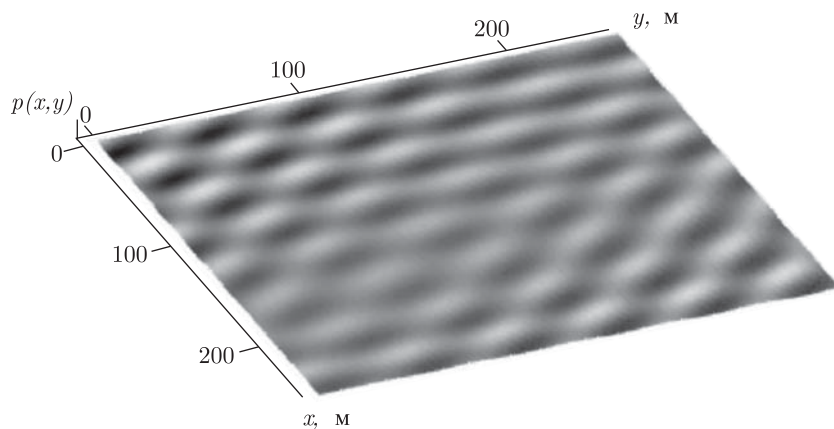


Рис. 2.5.4. Пространственная модель наложения двух пакетов поверхностных гравитационных волн для $f = 0,3, 0,33$ Гц; $\lambda = 33, 30$ м; $H = 10$ м; $c = 9,9$ м/с, $\theta = 90^\circ$ и 45°

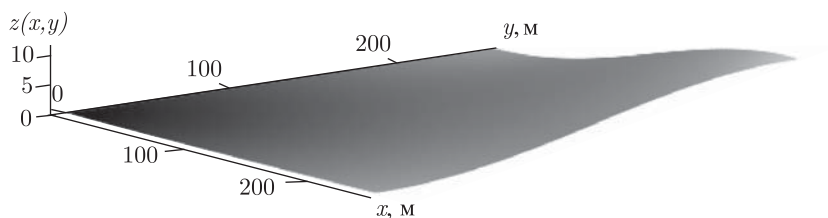


Рис. 2.5.5. Пространственная модель мыса ($250 \times 250 \times 10$ м), построенная по аналитическому выражению $z(x, y) = 0,0002xy \times \sin(0,00003xy)$

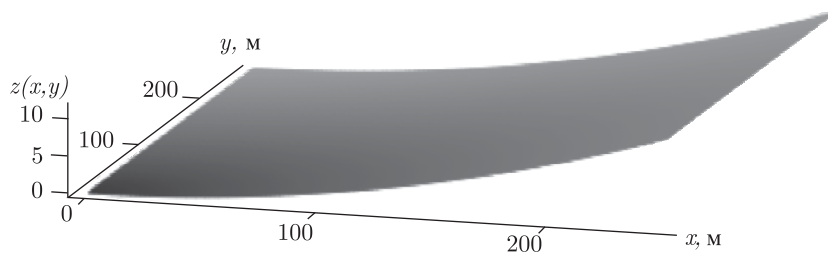


Рис. 2.5.6. Пространственная модель берегового выступа ($250 \times 250 \times 10$ м), построенная по аналитическому выражению $z(x, y) = 0,0002yx^2$

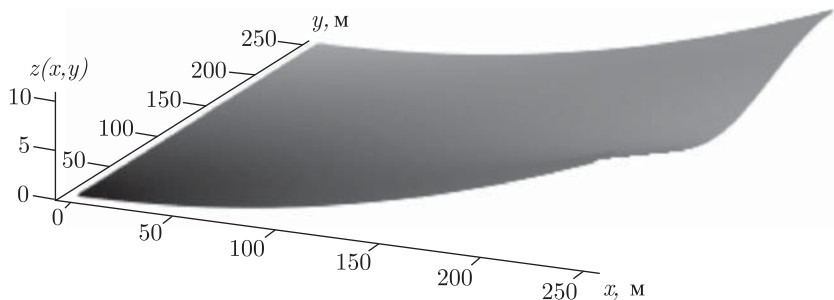


Рис. 2.5.7. Пространственная модель бухты ($250 \times 250 \times 10$ м), построенная по аналитическому выражению $z(x, y) = 0,00017x^2 \times (\cos(0,05y) + 3)$

На рис. 2.5.6 показана пространственная модель прямого берегового выступа, описываемого аналитическим выражением

$$z(x, y) = ab(y)x^2. \quad (2.5.2)$$

На рис. 2.5.7 представлена пространственная модель бухты по аналитическому выражению

$$z(x, y) = x^2 \cos(y). \quad (2.5.3)$$

Для моделирования процесса рефракции поверхностных гравитационных волн на данных береговых образованиях воспользуемся выражением для волнового числа в двухмерном случае (на основе выражения (2.3.17)):

$$k(x, y) = \sqrt{\frac{\omega^2}{g(H - z(x, y))}}, \quad (2.5.4)$$

где $z(x, y)$ — аналитическое выражение соответствующего берегового образования. Здесь следует отметить, что выражение (2.3.17) было получено при условии постоянства глубины, однако оно применимо и для переменной глубины при незначительной крутизне склона [Шулейкин, 1954]. В нашем случае крутизна склона находится в пределах $0,1^\circ$, несмотря на то, что глубина меняется от точки к точке по расчетной сетке, она является постоянной в каждой точке.

Протяженность поверхности залива по оси x ограничена береговой линией, источник волн расположен в начале координат. Волны на поверхности залива распространяются при отсутствии ветра, т.е. являются свободными. Для расчетов поверхность залива разбита на сетку с шагом 0,5 м по осям x и y , значение которого на порядок меньше интервала дискретизации для данных волн согласно теореме Котельникова [Гоноровский, 1957].

На рис. 2.5.8, 2.5.9 и 2.5.10 приведены пространственные модели явления рефракции пакета поверхностных гравитационных волн на мысу с направлением прихода $\theta = 0^\circ$, на ровном береговом выступе ($\theta = 45^\circ$)

и в бухте ($\theta = 90^\circ$), при $f = 0,3; 0,33$ Гц; $\lambda = 33; 30$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с.

С приближением к берегу с некоторых критических глубин фронт поверхностных волн начинает искажаться и стремится стать нормальным к береговой линии. Искажение фронта происходит в результате уменьшения скорости распространения, что приводит к уменьшению длины волны при постоянной частоте.

На рис. 2.5.11 и 2.5.12 приведены пространственные модели рефракции на мысу двух пакетов поверхностных гравитационных волн с разными углами прихода при $f = 0,3; 0,33, (0,4; 0,44)$ Гц; $\lambda = 33; 30, (25, 22)$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с.

В зависимости от направления прихода на поверхности залива образуются трехмерные ячейки различного масштаба и структуры. При наложении пакетов поверхностных волн с угловыми интервалами 30° создаются трехмерные ячейчатые структуры, более мелкомасштабные по сравнению с пакетами близких углов прихода.

На рис. 2.5.13, 2.5.14 и 2.5.15 представлены пространственные модели рефракции на мысу, на прямом береговом выступе и в бухте трех разных поверхностных волн, приходящих с разных направлений, при $f = 0,3; 0,33; 0,4$ Гц; $\lambda = 33; 30; 25$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с. На поверхности залива также образуются трехмерные волновые ячейки, имеющие схожую с пакетами структуру, однако, без характерных областей с пониженными уровнями отдельных волн.

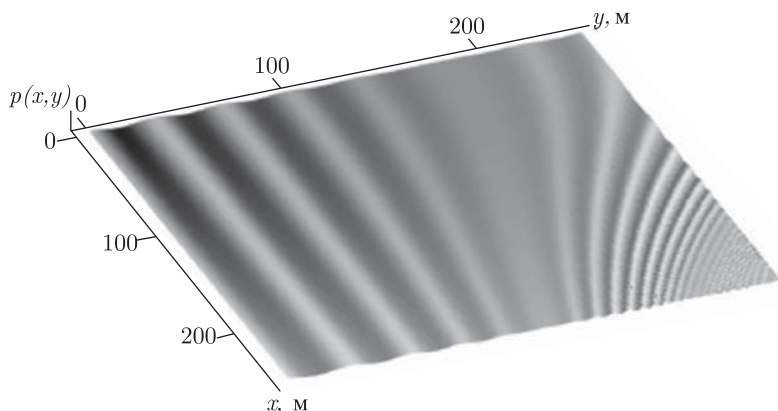


Рис. 2.5.8. Пространственная модель рефракции пакета поверхностных гравитационных волн на мысу для $f = 0,3, 0,33$ Гц; $\lambda = 33, 30$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с, $\theta = 0^\circ$

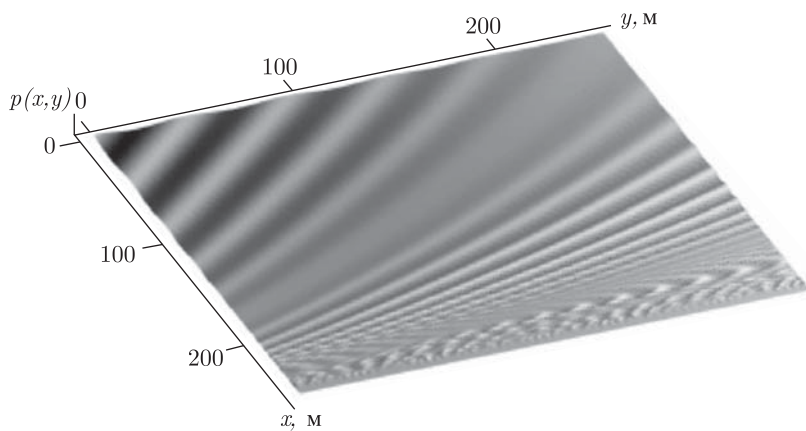


Рис. 2.5.9. Пространственная модель рефракции пакета поверхностных гравитационных волн на мысу для $f = 0,3, 0,33$ Гц; $\lambda = 33, 30$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с, $\theta = 45^\circ$

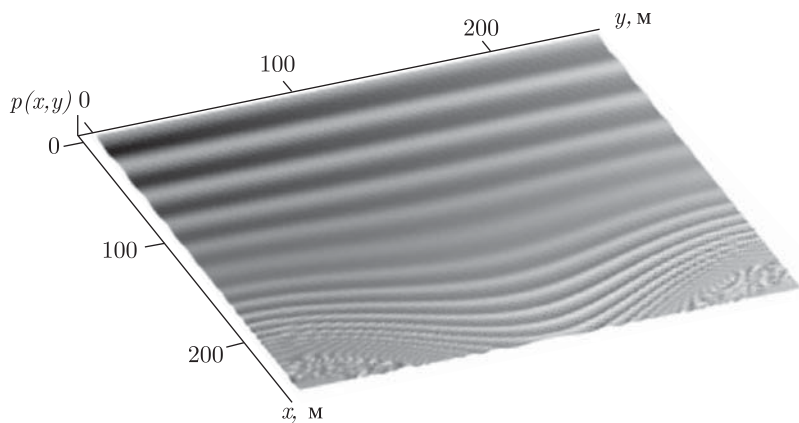


Рис. 2.5.10. Пространственная модель рефракции пакета поверхностных гравитационных волн на мысу для $f = 0,3, 0,33$ Гц; $\lambda = 33, 30$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с, $\theta = 90^\circ$

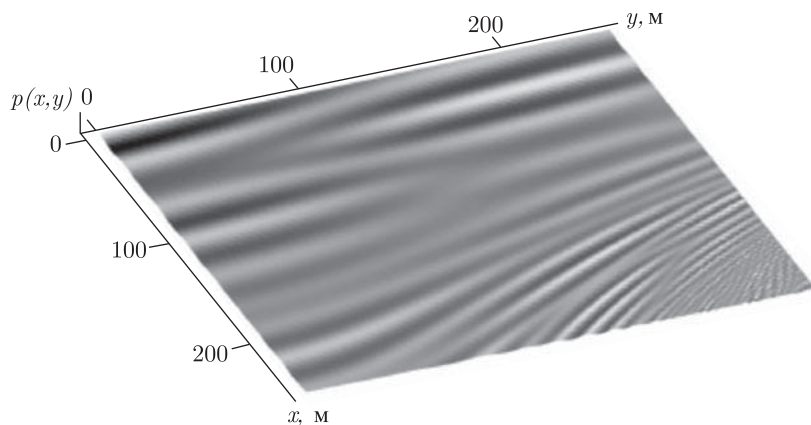


Рис. 2.5.11. Пространственная модель рефракции пакета поверхностных гравитационных волн на мысу для $f = 0,3, 0,33, (0,4; 0,44)$ Гц; $\lambda = 33, 30, (25, 22)$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с, $\theta = 90^\circ$ и 85°

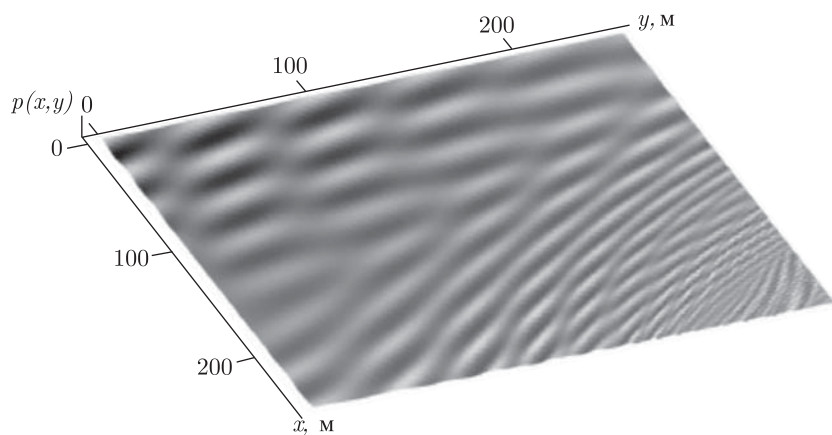


Рис. 2.5.12. Пространственная модель рефракции пакета поверхностных гравитационных волн на мысу для $f = 0,3, 0,33, (0,4; 0,44)$ Гц; $\lambda = 33, 30, (25, 22)$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с, $\theta = 90^\circ$ и 60°

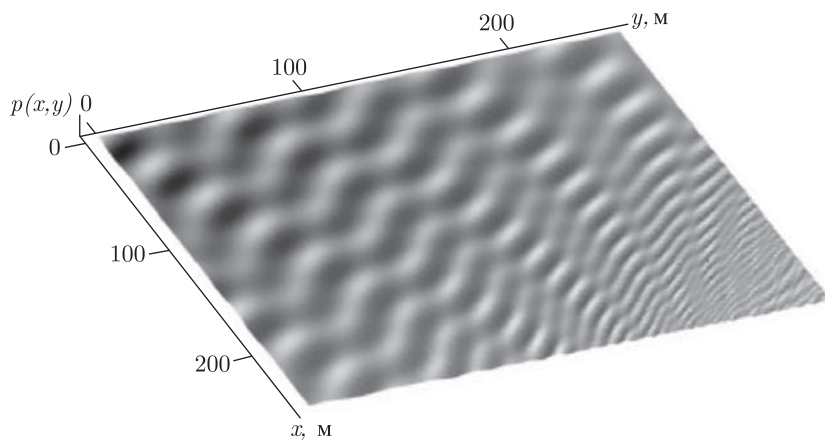


Рис. 2.5.13. Пространственная модель рефракции пакета поверхностных гравитационных волн на мысу для $f = 0,3, 0,33$ Гц; $\lambda = 33; 30; 25$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с, $\theta = 90^\circ, 60^\circ$ и 30°

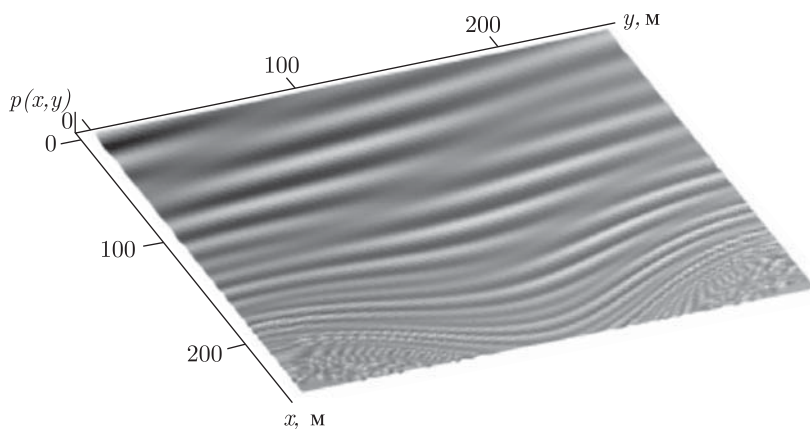


Рис. 2.5.14. Пространственная модель рефракции пакета поверхностных гравитационных волн в бухте для $f = 0,3, 0,33, 0,4$ Гц; $\lambda = 33; 30; 25$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с, $\theta = 90^\circ, 85^\circ$ и 80°

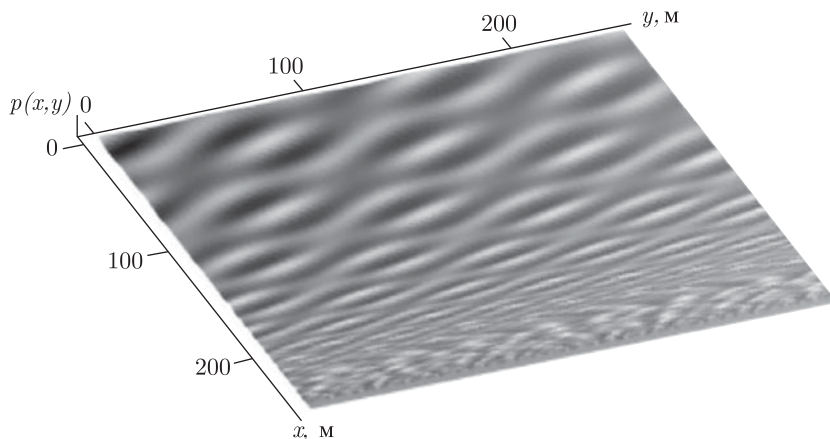


Рис. 2.5.15. Пространственная модель рефракции пакета поверхностных гравитационных волн на выступе для $f = 0,3, 0,33, 0,4$ Гц; $\lambda = 33; 30; 25$ м; $H = 12$ м; $c = 11$ м/с, $\theta = 90^\circ, 45^\circ$ и 70°

2.6. Натурные наблюдения волновых явлений на поверхности мелководья

На рис. 2.6.1–2.6.5 (см. цветную вклейку) представлены натурные фотофиксации некоторых волновых явлений на поверхности мелководья: наложение волн, образование периодических волновых структур, рефракция поверхностных волн в бухте, затухание поверхностных волн на берегу, разгон ветровых волн вдоль берега.

2.7. Корабельные волны. «Реактивные» утки Александровского сада

Одной из интересных задач волновой теории является исследование волн на поверхности жидкости, возникающих при движении по ней твердого тела. Эта задача интересна также для определения воздействия на береговые сооружения волн, создаваемых движущимся кораблем. Движущийся корабль расходует энергию на преодоление сопротивления воды, возбуждение вихрей в турбулентном следе и генерацию поверхностных волн.

За движущимся кораблем развивается волновой хвост, распространяющийся далеко в область, пройденную кораблем, и представляющий собой наложение двух различных семейств волн — *поперечных* и *продольных*. Аналогичные волновые следы оставляют также плавающие объекты естественного происхождения, такие как утки на рис. 2.7.1

(см. цветную вклейку). При этом можно определить угловой размер волнового следа и составить уравнение движения жидкости внутри этой волновой области.

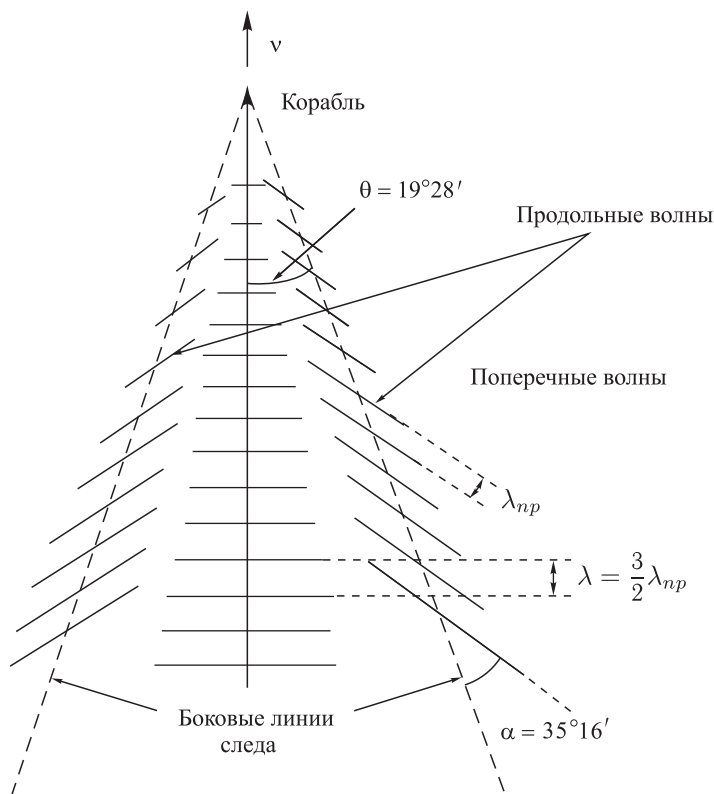


Рис. 2.7.2. Корабельные волны

Первые успехи в решении задачи об образовании корабельных волн были достигнуты Кельвином [Kelvin, 1910; Сретенский, 1977]. В теории Кельвина действие корабля на воду заменяется действием концентрированных импульсов давления, прикладываемых в точках пути корабля. Концентрированный импульс движется прямолинейно с постоянной скоростью из бесконечности. В каждый момент времени этот импульс добавляет известные скорости к ранее образовавшимся скоростям. Возвышение поверхности жидкости в данной точке и в данный момент времени t будет, таким образом, складываться из суммы возвышений, созданных всеми импульсами, приложенными к поверхности жидкости в течение времени от ∞ до данного момента t . По отношению к системе осей координат, движущейся вместе с импульсом,

поверхность жидкости будет иметь неизменную форму. Уравнение этой поверхности и было впервые составлено и изучено Кельвином.

После Кельвина теория корабельных волн исследовалась в работах Хэвелока [Havelock, 1908], Хогнера [Hogner, 1922]. Работа Хэвелока содержит общее описание волнового движения поверхности жидкости за кораблем, который заменяется перемещающимся импульсом давления. Хогнер заменяет действие корабля на воду, действием давлений перемещающихся по поверхности жидкости с постоянной скоростью. В работах Питерса [Petters, 1949], Лайтхилла [Lighthill, 1957] и Урселла [Ursell, 1960] теория корабельных волн получила дальнейшее развитие.

Наиболее удивительный результат, полученный впервые Кельвином, состоит в том, что на глубокой воде волны сосредоточены в клинообразной области с некоторым углом $\theta = 19^\circ 28' (\arcsin 1/3)$. Этот угол не зависит ни от скорости, ни от формы объекта. Угол определяется только тем, что на глубокой воде групповая скорость волн равняется половине фазовой скорости (выражение 2.3.20).

Фронты этих волн не совпадают с боковыми линиями следа, а образуют с ним определенный угол $\alpha = 35^\circ 16'$. Эти волны называются *продольными* (рис. 2.7.2). Непосредственно за кормой корабля имеется другое семейство волн, которые распространяются по направлению движения корабля с его скоростью. Эти волны называются *поперечными*, так как их фронт перпендикулярен к направлению движения корабля. В реальных условиях поперечные волны часто возмущаются турбулентным следом за кораблем с большим количеством пены, образующейся при обрушивании волн у носа корабля и из-за кавитации на винтах. Кроме того, обычно на систему корабельных волн накладываются ветровые волны [Монин, Крайчик, 1985].

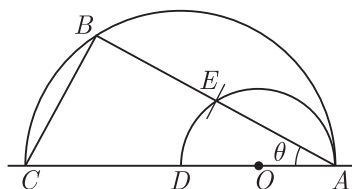


Рис. 2.7.3. Построение элементов волны

Рассмотрим корабль, движущийся со скоростью v и перемещающийся из точки A в точку B (рис. 2.7.3) за время t [Уизем, 1976]. Гребень волны будет оставаться неподвижным относительно корабля в том случае, когда

$$v \cos \theta = c, \quad (2.7.1)$$

где θ — угол между нормалью (направлением вектора \mathbf{k}) и линией движения AC . Это условие легче всего понять, перейдя в систему отсчета, в которой поток со скоростью v обтекает неподвижный ко-

рабль. В этой движущейся системе отсчета нормальная к элементу волны компонента $v \cos \theta = c$ скорости потока должна компенсироваться фазовой скоростью рассматриваемого элемента. Указанное условие позволяет определить величину \mathbf{k} в направлении θ .

Геометрически (рис. 2.7.3) это можно изобразить, построив полуокружность диаметром AC и заметив, что $AC = vt$, $AB = vt \cos \theta = ct$. Следовательно, для элементов волны, параллельных хорде BC , будем иметь $ct = AB$. Далее, c — фазовая скорость, соответствующая условию (2.7.1), но расположение рассматриваемых волн определяет именно групповая скорость $c_{\text{гр}} = c/2$. Волны, образующиеся в точке A , должны пройти расстояние $c_{\text{гр}}t = ct/2$.

Следовательно, в направлении θ они будут обнаружены в точке E — средней точке отрезка AB . Рассмотрев все значения θ , получим, что волны, возникающие в точке A и дающие вклад в стационарную картину, лежат на окружности радиуса $vt/4$ с центром в точке O , причем $OC = 3vt/4$. Наконец, фиксируя точку C и меняя t , мы получаем набор окружностей, изображенный на рис. 2.7.4б.

Каждая окружность имеет радиус, равный одной трети расстояния от ее центра до точки C . Следовательно, эти окружности заполняют клинообразную область с углом полураствора $\arcsin 1/3 = 19^\circ 28'$.

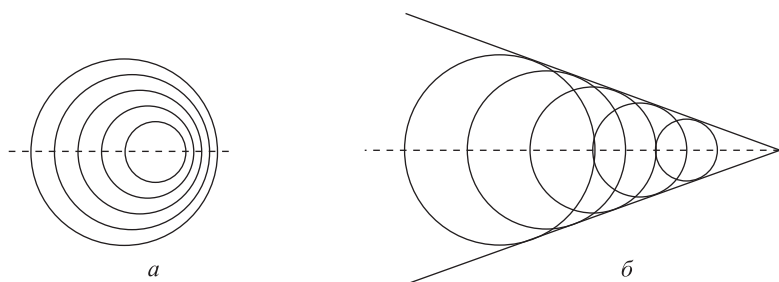


Рис. 2.7.4. Огибающая возмущений, возникающих в последовательные моменты

Следует подчеркнуть, что рис. 2.7.4б соответствует сверхзвуковому обтеканию. Допустим, что среда неподвижна, а источник возмущений прямолинейно движется со скоростью v . Если $v < c$, то источник двигается медленнее, чем производимые им возмущения, и картина возмущений будет такой, как изображено на рис. 2.7.4а и 2.7.5 (см. вклейку) [Лаврентьев, Шабат, 1973]. Если же $v > c$, то источник будет опережать возмущения, и мы получим картину, изображенную на рис. 2.7.2б.

Одно из наиболее существенных отличий сверхзвуковых и дозвуковых режимов среды связано с различным характером распространений в них локальных возмущений. Именно, при дозвуковых скоростях

возмущения распространяются по всему пространству, а при сверхзвуковых — лишь внутри некоторого сектора.

2.8. Выводы

Во второй главе были проведены исследование и моделирование волновых явлений на поверхности мелководья. Описаны различные типы волн, возникающие на поверхности воды и существующие на мелководье.

Сделан обзор исследований по поверхностным гравитационным волнам, представлены основные исторические этапы развития и особенности существующих теорий волн на воде.

Представлены основные уравнения для описания поверхностных гравитационных волн, основные параметры волн в приближениях мелкой и глубокой воды. Также описаны капиллярные и гравитационно-капиллярные волны.

Рассмотрены основные параметры поверхностных гравитационных волн на мелководье, приведены графики горизонтальной и вертикальной скоростей частиц среды, распределения давления от глубины, зависимость скорости распространения от волнового числа, траектории движения частиц в гравитационной волне, определены частоты собственных колебаний несжимаемой жидкости в условиях Таганрогского залива.

Приведены пространственные трехмерные модели волновых явлений на поверхности мелководья в линейном случае: распространение пакета волн, наложение пакета волн с разными направлениями прихода.

Для моделирования рефракции поверхностных гравитационных волн при подходе к берегу созданы трехмерные модели береговых образований в виде мыса, бухты и ровной береговой линии. Представлены пространственные трехмерные модели рефракции отдельного пакета и наложения поверхностных гравитационных волн на различных береговых образованиях для линейного случая.

Были рассмотрены волны на поверхности жидкости, возникающие при движении твердого тела по ее поверхности. Описаны основные параметры волнового хвоста за движущимся кораблем. Приведены волновые картины для случаев с разными соотношениями между скоростью движения плавающего объекта и скоростью расходящихся волн.

Представлены натурные иллюстрации волновых явлений: наложение волн ряби и зыби, рефракция волн в условиях бухты, также разные случаи распространения корабельных волн.

Результаты исследований, проведенных в данной главе, были опубликованы в следующих основных работах:

— в работах [Аббасов, 2000 ТРТУ; 2000 БСК; 2000 СНГ] рассмотрены вопросы трехмерного моделирования распространения и ре-

фракции поверхностных гравитационных волн на пологом береговом выступе для линейного случая;

— в работе [Аббасов, 2000 ДЕП] представлены основные параметры поверхностных гравитационных волн на мелководье, разработаны трехмерные модели береговых образований в виде прямой береговой линии, мыса и бухты с помощью аналитических функций, приведены пространственные модели наложения и рефракции поверхностных гравитационных волн в условиях заливах;

— в работе [Аббасов, 2001 ИСК; Abbasov I.B. 2001 Wessex] рассмотрены вопросы пространственного моделирования волновых явлений на поверхности мелководья, описаны физические процессы и вопросы трехмерного моделирования береговых образований и рефракции поверхностных гравитационных волн;

— в работе [Аббасов, 2002 ТРТУ] описаны вопросы пространственного моделирования распространения локальных возмущений в диапазоне гравитационно-капиллярных волн, возникающих на поверхности водной глади.

Глава 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА МЕЛКОВОДЬЕ

3.1. Обзор исследований по нелинейным поверхностным гравитационным волнам на мелководье

Влияние мелководья на длинные (приливные) волны было первоначально исследовано Г. Эйри [Лемб, 1947]. Из уравнений гидродинамики было выведено приближенное уравнение профиля приливной волны, первоначально обладавшей простой формой косинусоиды и искаженной под действием мелководья. Был найден приближенный закон нарастания второй гармоники по мере распространения волн в мелководном районе моря. При этом в уравнении Эйлера учитывался нелинейный член $u\partial u/\partial x$, который всегда отбрасывается при исследовании волн малой амплитуды.

При применении уравнений движения и неразрывности к явлениям прилива воспользовался *методом последовательного приближения* [Airy, 1845]. В качестве примера он рассматривал канал, который одним концом соединяется с открытым морем, где возвышение дано формулой

$$\eta = a \cos \omega t. \quad (3.1.1)$$

Решением второго приближения для функции возвышения является

$$\eta = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) - \frac{3}{4} \frac{g \omega a^2}{c_0^3} x \sin 2\omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right). \quad (3.1.2)$$

На рис. 3.1.1 представлен (с увеличенной амплитудой) профиль волны, вычисленный на основе полученного решения для некоторого частного случая. Было найдено, что гребни и впадины волны являются несимметричными, впадина является более пологой, чем гребни.

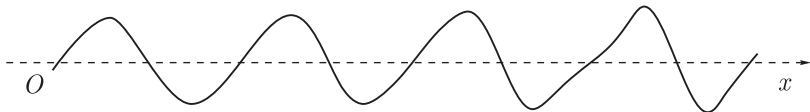


Рис. 3.1.1. Профиль приливной волны

Присутствие множителя x вне знака тригонометрической функции указывает на существование границы, вне которой приближение

не применимо. Условие для применения способа последовательных приближений состоит в том, что $g\omega a^2/c_0^3$ должно быть мало. Если учесть, что отношение $c_0 = \sqrt{gH}$, $\lambda = 2\pi c_0/\omega$, то эта дробь будет равна $2\pi(a/H)(x\lambda)$.

Отсюда следует, что как бы мало ни было отношение первоначального возвышения к глубине, вышенаписанная дробь перестает быть малой, когда x достаточно больше длины волны.

Решение во втором приближении состоит из двух членов. Из них второй представляет свержприлив, или прилив второго порядка, так как он пропорционален a^2 ; частота этого прилива в два раза больше частоты начального приливного колебания.

Если исходное возмущение в устье канала будет дано формулой

$$\eta = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi), \quad (3.1.3)$$

то во втором приближении подобным образом получатся приливы с комбинационными периодами. Они аналогичны комбинационным тонам в акустике, которые были исследованы впервые Г. фон Гельмгольцем [Helmholtz, 1859].

В результате двух последовательных приближений Г. Эйри получил форму профиля, искаженного второй гармоникой. Однако необходимо отметить, что появление и постепенное нарастание гармоник более высоких порядков неизбежно приведет к уменьшению амплитуды основного колебания в результате передачи все большей части энергии. Пренебрежение перекачкой энергии от основной волны приведет к нарушению закона сохранения энергии.

Метод Г. Эйри был применен Г. Джеффрисом [Jeffreys, 1924] для поверхностных волн. Он попытался подобным образом выяснить условия разрушения их на мелководье. Однако профиль волны, распространяющейся на мелководье, можно описать суммой множества высших гармоник.

Вопросы исследования на поверхности воды достаточно подробно исследовал в середине прошлого века Л. Н. Сретенский [Сретенский, 1977]. Он построил теорию движения свободных приливных волн внутри полярного бассейна, создал карту распространения полусуточной приливной волны в водном полушарии Земли, приняв во внимание форму континентов и островов этого полушария.

Л. Н. Сретенский выполнил большой цикл работ по общей линейной теории волн. Он показал, что на поверхности раздела жидкостей появляются волны большей амплитуды, чем на свободной поверхности, а также изучил мало исследованную задачу распространения установившихся волн на поверхности трехмерного потока жидкости бесконечной глубины. Он построил алгоритм, позволяющий решать в любом приближении задачу о динамике трехмерных установившихся волн конечной амплитуды.

Сретенский исследовал также волновые движения на поверхности канала переменной глубины [Сретенский, 1963], получил результаты

для бассейнов, имеющих равномерно понижающееся дно. Результаты были получены с помощью методов теории аналитических функций и дифференциально-разностных уравнений. Решение неоднородного дифференциального уравнения определяет волновое движение, имеющее вблизи берега неограниченно растущие колебания, переходящие вдали от берега в стоячие волны.

В работе Б.Н. Румянцева [Румянцев, 1960] рассматриваются неустановившиеся движения тяжелой жидкости у наклонного берега. Дно бассейна представляется прямой линией, наклоненной к горизонту под некоторым углом. Поверхность жидкости получает отклонение от начального положения, а частицам жидкости сообщаются некоторые начальные скорости. Б.Н. Румянцев решил эту задачу с помощью интегральных уравнений. Рассматривал распространение концентрированного возвышения поверхности жидкости. Возвышение, распадаясь, образует две группы волн, распространяющихся в противоположных направлениях от центра возмущений (к берегу и от берега). Пространственная задача о волнах в бассейне с наклонным дном исследуется в работе М. Розо [Roseau, 1952].

Теорию стоячих волн на поверхности трехмерной массы жидкости рассматривал Я.И. Секерж-Зенькович [Секерж-Зенькович, 1952]. При этом уравнения для поверхности жидкости решаются методом разложения в ряды по степеням малого параметра.

Достаточно обширные экспериментальные исследования ветровых волн в штормовом бассейне были проделаны В.В. Шулейкиным [Шулейкин, 1968]. Он занимался механизмом зарождения и начальной стадией развития ветровых волн. С помощью светящихся шарообразных поплавков нейтральной плавучести В.В. Шулейкин исследовал орбиты частиц в ветровых волнах. Он создал систему уравнений, предложил графоаналитический способ для расчета поля ветровых волн в глубоком море. В работе [Шулейкин, 1954] он описал процесс разрушения волн под действием мелководья и представил экспериментальные данные по изменению профиля ветровых волн в различные моменты времени. По аналогии с оптической рефракцией он рассматривал в работе [Шулейкин, 1935] вопросы рефракции волн на материковой отмели. Ввел понятие показателя преломления морских волн на основе соотношения их скоростей в бесконечно глубоком море и на произвольной глубине.

Процессы рефракции поверхностных волн исследовались Ю.М. Крыловым. В работе [Крылов, 1950] он рассмотрел рефракцию волн на материковой отмели. В его рефракционных задачах в качестве главного характеристического фактора выступает показатель преломления среды, меняющийся от точки к точке. Он развил эту теорию применительно к острову круглой и треугольной формы, а также к мысу, к которому подходят волны. Эта теория позволяет вычислить также изменение амплитуды волн, подходящих к берегу.

В конце прошлого века большой вклад в теорию мелкой воды внесли работы Д. Перегрин. Для канала с неровным дном он вывел уравнение Кортевега–де Вриза: (КдВ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + k^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \nu(H)u, \quad (3.1.4)$$

где функция $\nu(H)$ учитывает эффект переменной глубины [Peregrine, 1967]. Было численно обнаружено и экспериментально подтверждено, что солитон при переходе к меньшей глубине распадается на несколько разных по размерам солитонов в осциллирующем следе.

Он интерпретировал разрушение волн над наклонным дном как следствие концентрации энергии в уменьшающемся объеме воды. В процессе трансформации волн орбитальные скорости возрастают и в верхней части гребней становятся соизмеримыми с фазовой скоростью волны. Вследствие роста высших гармоник и смещения их фаз относительно основного колебания, гребень заостряется и становится асимметричным. Кривизна орбитальных траекторий частиц возрастает, в результате чего направленные вверх ускорения становятся сравнимыми с ускорением силы тяжести. По исследованиям Д. Перегрин [Peregrine, 1976, 1993] в тонкой области фронта волны вертикальные ускорения могут достигать $5g$. В результате волна становится неустойчивой и начинает разрушаться.

Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия гравитационных волн проводятся в статье О.М. Филиппа [Philips, 1966]. Сравниваются результаты экспериментальных исследований по обнаружению резонансного взаимодействия между поверхностными волнами. Эти результаты дают представление об основных особенностях взаимодействия. Максимальный отклик при резонансе и линейный рост амплитуды зависит от протяженности взаимодействия. Уменьшение ширины группы взаимодействующих волн меняется с протяженностью взаимодействия и из-за дисперсии смещаются точки резонанса.

Особо хотелось отметить исследования в области теории мелкой воды Е. Н. Пелиновского и представителей его школы. В течение достаточно долгого времени он занимается математическим моделированием волновых процессов для прогнозирования природных катастроф, исследует явления цунами, наката волн, нелинейной деформации профиля волны на мелководье. Работа Л.А. Островского и Е.Н. Пелиновского [Островский, Пелиновский, 1970] посвящена трансформации волн на поверхности жидкости переменной глубины. Представлено обобщенное уравнение КдВ на случай, когда глубина $h = h(x)$ зависит только от одной координаты x (перпендикулярна берегу), и некоторые его решения в приложении к трансформации нелинейных волн на береговом откосе.

В работе А.Г. Куликовского и В.А. Реутова [Куликовский, Реутов, 1980] исследуется задача распространения нелинейных волн над полу-

бесконечными подводными впадинами и хребтами. Приведена асимптотическая волновая модель распространения поверхностных гравитационных волн.

Трансформация спектра ветровых волн при рефракции представлена в работе [Красицкий, 1974]. Рассмотрено влияние ветра на спектральные компоненты поверхностной волны в условиях мелкого моря. При продолжительном действии ветра волны растут, максимум спектральных характеристик перемещается в сторону меньших волновых чисел.

Моделированию волновых и дифракционных процессов в сплошных средах посвящено достаточно много работ И.Т. Селезова. В работе [Селезов, 1989] выводится уравнение для слабонелинейных и слабодисперсионных волн на поверхности жидкости переменной глубины. При амплитуде смещения дна $\xi = 0$ полученное однородное уравнение сводится к уравнению типа КдВ, и оно имеет солитонное решение. Скорость распространения волн зависит не только от глубины и возвышения свободной поверхности, но и от величины смещения дна:

$$c = \sqrt{g(h_0 + \eta_0 - \xi)}. \quad (3.1.5)$$

В рамках длинноволновой теории он рассматривает также задачу распространения неустановившейся поверхностной волны в океане от очаговой области подводного землетрясения, в работе представлены формы свободной поверхности в различные моменты времени.

В работе [Селезов, 1982] исследуется трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. Рассматривается модель со снятым ограничением на малость параметра нелинейности $\varepsilon = a/H$. Построенная аппроксимация является обобщением модели Буссинеска или модели мелкой воды. Такая модель описывает накат волн на наклонный пляж при больших значениях ε более точно, чем модели Кортевега–де Вриза, Перегринна и мелкой воды. В работе [Селезов, 1985] представлена нелинейно-рефракционная модель распространения поверхностных волн в жидкости.

В работах С. А. Габова [Габов, 1979, 1988] рассматриваются вопросы применения уравнения Уизема к описанию набегания морских волн на пологий берег. Процесс набегания волн из открытого моря на берег делится на три основных этапа эволюции (рис. 3.1.2):

- гладкие волны; на этом этапе волны находятся вдали от берега, глубина велика, они имеют гладкий, пологий характер;
- волны предельной амплитуды; приближаясь к берегу на сравнительно небольшой глубине, эти гладкие волны увеличивают свою амплитуду, достигая предельной амплитуды, и заостряются на вершине;
- разрушение волн; на этом этапе происходит опрокидывание волн.

Достигнув мелководья, волны предельной амплитуды начинают разрушаться, опрокидываясь вперед по движению. Для описания процесса

набегания используется вариант уравнения Уизема:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{H}} \times \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \int_{-\infty}^{+\infty} K_H(x-s) \eta_s(s, t) ds = 0, \quad (3.1.6)$$

ядро интегрального члена определяется равенством

$$K_H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{gth(kH)/k} \times \exp(ikx) dk, \quad (3.1.7)$$

где $c(k) = \sqrt{gth(kH)/k}$ — фазовая скорость, отвечающая дисперсионному соотношению для волн на поверхности тяжелой жидкости глубиной H .

Предполагается, что берег, на который набегают волны, пологий в том смысле, что на расстояниях, равных нескольким длинам волн, глубина меняется незначительно и может считаться *постоянной*. Другими словами, на расстояниях d , характерных для волн данного этапа их эволюции, глубина жидкости мало меняется, т.е. $\Delta H/d \ll 1$. Поэтому величина H считается постоянной на каждом этапе эволюции волн.

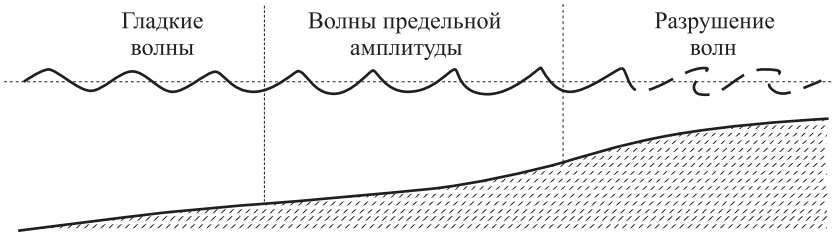


Рис. 3.1.2. Этапы набегания волн из открытого моря на берег

На первом этапе гладкие волны хорошо описываются уравнением Уизема. Нелинейность в уравнении на этом этапе играет роль лишь фактора, сдерживающего дисперсионные эффекты, не позволяя волнам «размазываться» за счет разных фазовых скоростей гармонических составляющих.

При переходе на меньшую глубину задние гребни волн, находясь на большей глубине, имеют большие скорости распространения (это следует из вида величин $c_0 = \sqrt{gH}$ и $c(k) = \sqrt{gth(kH)/k}$) и начинают догонять передние гребни. В результате происходит уменьшение длины волны. Однако энергия волн, сосредоточенная на одной длине волны, остается неизменной в силу отсутствия диссипации энергии (или ее незначительности), что приводит к увеличению амплитуды волн.

Амплитуды волн возрастают до некоторого максимального уровня, и они превращаются в волны предельной амплитуды. Волны пре-

дельной амплитуды, переходя далее на мелководье, начинают опрокидываться и разрушаться. На малых глубинах ядро интегрального члена почти всюду стремится к нулю. На третьем этапе эволюции волн действие интегрального члена мало (слабое влияние дисперсии) и решения уравнения Уизема ведут себя аналогично решениям простейших уравнений с нелинейностью, опрокидываясь и разрушаясь за конечное время. Вопросы опрокидывания волн на основе уравнения Уизема также описаны в работе [Наумкин, Шишмарева, 1986].

Некоторые вопросы численного моделирования распространения волн на поверхности жидкости в рамках нелинейно-дисперсионной модели Перегринна рассматриваются в работе [Шокин и др., 1989]. В работе также приводится классификация нелинейно-дисперсионных моделей мелкой воды.

Численное моделирование нестационарных периодических поверхностных волн проводится также в статье [Коган, Кузнецова, 1995]. Задача об эволюции поверхностных волн сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Численно моделируется динамика гравитационных волн при различных амплитудах и длинах волн. Приведены профили гравитационных волн в начальный момент времени и в момент обрушения.

Моделирование обрушивающихся волн в жидкости конечной глубины описывается в работе [Калмыков, 1996], для этого используется трехволновое уравнение Фурье-амплитуд волновых гармоник. Волны приобретают выраженную асимметрию в направлении движения. Наличие асимметрии относительно вертикальной оси экспериментально наблюдалось в работе О. Филиппса [Philips, 1966], формирование асимметричной волны в направлении движения приведено в работе М. Лонге-Хиггинса [Longuet-Higgins, 1993]. Вопросы обрушения волн подробно приведены в обзоре Д. Перегринна [Peregrine, 1993].

Математическому моделированию гидродинамики Азовского моря посвящены работы Л. А. Крукиера, А. Л. Чикина, Г. В. Муратовой и др. Работа Л. А. Крукиера [Крукиер, 1991] посвящена оценке изменения гидродинамики Азовского моря в случае реализации проектов реконструкции его экосистемы. Для этого используется математическая модель, основанная на численном решении полной системы нелинейных уравнений мелкой воды. В работах [Чикин, 2001], [Муратова, 2004] приводятся описания трехмерной задачи определения гидродинамических параметров течения в Азовском море и Таганрогском заливе, получены картины течений при различных ветровых ситуациях. В основу данных гидродинамических моделей положена система уравнений теории мелкой воды с нелинейными членами, полученная в работе [Волцингер, Пясковский, 1977].

Построению высокоточных трехмерных моделей гидродинамики Азовского моря посвящены работы А. И. Сухинова. В работах [Сухинов, 1987, 2003, 2007] построены высокоточные 2D- и 3D-модели гидродинамики, транспорта тепла, солей и взвесей в мелководных во-

доемах. Созданы физико-математические модели турбулентного обмена в морских системах, предложены методы решения сеточных уравнений математической физики для массовых параллельных вычислительных систем. В статьях [Сухинов, 2003; Debol'skaya, et al., 2005] представлены результаты комплексных океанологических исследований Азовского моря, объяснены механизмы возникновения гигантских природных ловушек, аккумулирующих загрязнения и взвешенное вещество.

Статья [Литвиненко, Хабахпашева, 1999] посвящена численному моделированию нелинейных длинных волн в бассейнах с пологим дном. Рассматривается нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды с учетом топографии и вязкость жидкости. Проводится сравнение расчетов по трансформации плоского возмущения свободной поверхности воды с опытными данными. Численно решается задача о воздействии коническо-цилиндрического острова, подводного хребта и трения о наклонное дно на эволюцию плоской уединенной волны. Вопросы моделирования пространственных нелинейных волн рассматриваются в работе Д. Г. Архипова и Г. А. Хабахпашева [Архипов, Хабахпашева, 2006]. Описана динамика волн конечной амплитуды, бегущих в различных направлениях, при наличии дисперсии.

Достаточно детальный обзор по нелинейным длинным волнам на поверхности воды и солитонам проделан в работе Р. Х. Зейтуныя [Зейтуныя, 1995]. В обзоре дается обоснованный вывод модельных уравнений с использованием асимптотических методов. В некоторых случаях эти приближенные уравнения являются интуитивными и эвристическими. Описаны исторические моменты исследования волн на поверхности воды, рассмотрены уравнения Буссинеска, Кортевега–де Вриза, Шредингера. Представлены различные этапы исследования явления уединенных волн и солитонов.

Вопросы трансформации поверхностных волн рассмотрены в работах Ю. З. Алешкова [Алешков, 1980, 1989, 2001]. В его трудах описаны задачи взаимодействия гравитационных волн с твердыми поверхностями, динамические процессы в прибрежной зоне моря, процессы трансформации поверхностных волн в жидкости при медленно изменяющейся глубине, нелинейная теория трансформации и рефракции поверхностных волн.

В монографии И. О. Леонтьева [Леонтьев, 2001] дается представление о главных процессах и механизмах, действующих в прибрежной зоне морей, включая трансформацию волн. В работе обсуждается комплекс явлений, обусловленных процессом обрушения ветровых волн, волновым переносом и горизонтальной циркуляцией, генерируемой волновым полем. Построена численная модель прибрежной циркуляции, с помощью которой показаны особенности штормовых течений для различных типов прибрежной топографии.

В статье Н. А. Кудряшова и др. [Кудряшов, 2003] проводится математическое моделирование гравитационных волн в приближении мелкой воды. Исследуется движение уединенной волны по поверхно-

сти воды, выход волны на берег, прохождение уединенной волны над подводной скалой. При моделировании движения уединенной волны солитонного типа приближение мелкой воды начинает нарушаться при отношении глубины воды к длине волны, равном 0,3. Приближение мелкой воды можно использовать для оценки расстояния от берега, на котором происходит опрокидывание волны.

В работах С. Ю. Кузнецова [Кузнецов, 2002, 2005, 2009] проведены исследования поверхностных волн в береговой зоне моря и переноса взвешенных наносов. Приведены результаты натурных экспериментов по измерению волнения, исследованы закономерности трансформации нерегулярных волн в береговой зоне. При приближении поверхностных волн к берегу происходит выравнивание высот волн из-за нелинейной перестройки спектра волн в области частот первых гармоник. При этом отношение амплитуд первой и второй гармоник меняется во времени. Степень асимметрии волн и уклон дна приводят к частотной зависимости скорости диссипации энергии волн при обрушении. Обрушение изменяет форму спектра волн, компенсируя действия процессом нелинейной трансформации.

Работа М. А. Шерменевой и И. В. Шугана [Шерменева, Шугана, 2006] посвящена математическому моделированию распространения нелинейных волн на поверхности воды. Предложен метод аналитического решения уравнений Буссинеска высокого порядка. С помощью полученных решений вычислен накат поверхностных волн на наклонный берег. Выведены выражения, описывающие трансформацию поверхностных волн над препятствием с эллиптическими линиями уровня. Показано, что по волновой картине на поверхности можно судить о форме, местонахождении и ориентации препятствия.

В работах Е. Н. Пелиновского, И. И. Диденкуловой и А. А. Куркина [Диденкуловой и др., 2006, 2008] исследуются процессы нелинейной деформации поверхностной волны на мелководье и проблема наката морских волн на берег в рамках точных решений нелинейной теории мелкой воды. В зависимости от формы подходящей волны получаются различные формулы для высоты наката волны на берег. Предложена аналитическая формула для высоты наката одиночной волны на берег в приложении к волнам цунами.

3.2. Нелинейные модели поверхностных гравитационных волн на мелководье

Рассмотрим слой жидкости, ограниченный горизонтальным дном $z = 0$ и свободной поверхностью $z = H$ [Габов, 1988]. Нелинейные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести описываются системой уравнений

$$\gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \text{ при } 0 < z < 1 + \varepsilon \zeta, \quad (3.2.1a)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } z = 1 + \varepsilon \zeta, \quad (3.2.1\text{в})$$

где $\gamma = (H/\lambda)^2$ — дисперсионный параметр, $\varepsilon = a/H$ — нелинейный параметр, a — амплитуда волн на свободной поверхности, Φ — функция потенциала скорости, $\zeta(x, y, t)$ — функция свободной поверхности.

Предположим, что функция Φ , являющаяся решением системы (3.2.1), допускает разложение в степенной ряд

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, t) z^n. \quad (3.2.2)$$

Подставляя это разложение в уравнение (3.2.1а) и граничное условие (3.2.1б) и сравнивая коэффициенты при различных степенях z , получим, что (3.2.2) можно переписать в виде

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \gamma^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} f(x, t), \quad (3.2.3)$$

где $f(x, t) = f_0(x, t)$.

Подставляя теперь (3.2.3) в условия (3.2.1в) на свободной поверхности, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \varepsilon \gamma) f_x] - \\ & - \left\{ \frac{1}{6} (1 + \varepsilon \gamma)^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f + \frac{1}{2} \varepsilon (1 + \varepsilon \gamma)^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f \right\} \gamma + O(\gamma^2), \\ & \zeta + \frac{\partial}{\partial t} f + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} f^2 - \\ & - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon \gamma)^2 \left\{ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \varepsilon \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2} \right\} + O(\gamma^2). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Здесь символ $O(\gamma^2)$ обозначает члены, содержащие γ во второй степени и выше.

Предположим, что $\gamma = (H/\lambda)^2 \ll 1$, т.е. глубина жидкости много меньше длины распространяющихся в жидкости волн. Пренебрегая в (3.2.4) членами первого и более высоких порядков по γ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \varepsilon \zeta) \frac{\partial f}{\partial x} \right] &= 0, \\ \zeta + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial f^2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Из (3.2.3) следует, что в рассматриваемом приближении $\Phi = f(x, t)$ и тем самым $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u$, где u — горизонтальная компонента вектора скорости частиц жидкости. Дифференцируя второе уравнение в (3.2.5) по x и возвращаясь к размерным переменным, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(H + \zeta)u] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

которая носит название *уравнений мелкой воды*.

Первое уравнение в (3.2.6) по своему физическому смыслу является уравнением неразрывности или уравнением закона сохранения объема жидкости. Второе уравнение — динамическое и отражает закон сохранения импульса.

Эффекты дисперсии в этих уравнениях в приближении мелкой воды (или длинноволнового рассмотрения) отсутствуют. Решения этих уравнений приводят к волнам с возрастанием уровня от времени, и, следовательно, они опрокидываются.

Явление опрокидывания предсказывается теорией мелкой воды для всех волн с возрастанием уровня. Однако реально не все волны опрокидываются на мелководье. Неизбежное опрокидывание является результатом пренебрежения дисперсионными эффектами. Но необходимо отметить, что простые теории, учитывающие эффекты дисперсии вообще приводят к исключению процесса опрокидывания во время распространения [Уизем, 1976].

Для учета дисперсионных эффектов нужно использовать разложение по малому параметру γ для уравнений теории мелкой воды. В этом приближении дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = c^2 k^2 - \frac{1}{3} c^2 H^2 k^4. \quad (3.2.7)$$

С учетом соотношения (3.2.7) система уравнений мелкой воды (3.2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(H + \zeta)u] &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3} H \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Эти уравнения впервые были получены *де Буссинеском* в 1871 г. и называются его именем [Boossinesq, 1871]. Эта система описывает нелинейные волны малой амплитуды на мелкой воде.

Из дисперсионного соотношения (2.3.8):

$$\omega^2 = g k \operatorname{th} k H,$$

следует, что частота может быть как мнимой, так и вещественной. Это приводит к тому, что уравнение Буссинеска включают волны, движущиеся как влево, так и вправо.

В дальнейшем будем раскладывать дисперсионное соотношение (2.3.8) для поверхностных гравитационных волн в ряд. Для этого оставляем дисперсионное соотношение для волн распространяющихся вправо:

$$\omega = \sqrt{gk} \sqrt{\text{th } kH}. \quad (3.2.9)$$

Учитывая разложение в ряд гиперболического тангенса с точностью до второго члена [Двайт, 1983]:

$$\text{th } kH \approx kH - \frac{(kH)^3}{3},$$

из выражения (3.2.9) получим

$$\omega = \sqrt{gk} \sqrt{kH - \frac{(kH)^3}{3}} = \sqrt{gk} \sqrt{kH} \sqrt{1 - \frac{(kH)^2}{3}}. \quad (3.2.10)$$

Далее раскладываем третий корень выражения (3.2.10) в степенной ряд по параметру $kH \ll 1$ до второго члена:

$$\sqrt{1 - \frac{(kH)^2}{3}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{(kH)^2}{3}. \quad (3.2.11)$$

Подставляем полученное выражение (3.2.11) в выражение (3.2.10):

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{gk} \sqrt{kH} \left(1 - \frac{(kH)^2}{6} \right) = k \sqrt{gH} \left(1 - \frac{(kH)^2}{6} \right) = \\ &= \sqrt{gH} \cdot k - \sqrt{gH} \frac{H^2}{6} k^3 = ck - c \frac{H^2}{6} k^3 = ck - \beta k^3, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

где $\beta = \frac{cH^2}{6}$, $c = \sqrt{gH}$ — скорость распространения гравитационных волн для мелкой воды (выражение (2.3.17)).

В окончательном виде дисперсионное соотношение для волн, движущихся вправо, примет вид

$$\omega = ck - \beta k^3. \quad (3.2.13)$$

Если рассмотреть решения уравнений Буссинеска, описывающих волны, распространяющиеся только вправо на основе дисперсионного соотношения (3.2.13), то получим *уравнение Кортевега-де Вриза*:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varepsilon \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} \gamma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (3.2.14)$$

Оно было выведено в 1885 г. для описания распространения волн в каналах [Габов, 1988]. С учетом значений безразмерных параметров уравнение (3.2.14) примет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{H} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} c H^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (3.2.15)$$

Решения системы уравнений Буссинеска (3.2.8) удовлетворяют соотношению между горизонтальной компонентой скорости частиц u и функцией возмущенной поверхности ζ (инвариант Римана [Уизем, 1976]):

$$u = \zeta - \frac{1}{4} \varepsilon \zeta^2 + \frac{1}{3} \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Тогда уравнение Кортевега и де Вриза для горизонтальной компоненты скорости частиц u примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.2.16)$$

Уравнение Кортевега–де Вриза применяется ко многим задачам о диспергирующих волнах, не связанных с волнами на воде: ионно-звуковые волны в холодной плазме, продольные волны в упругих стержнях [Нел. волны, 1977].

Часто используется также каноническая форма уравнения Кортевега–де Вриза, отличающаяся простотой записи:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.2.17)$$

Выражение в правой части уравнения (3.2.16) описывает нелинейные процессы, а третье слагаемое в левой части — дисперсию волн. Второе и третье слагаемые в левой части выведены из дисперсионного соотношения (2.3.8). При этом слабая нелинейность ($\varepsilon \ll 1$), приводящая к укрупнению волны, и слабая дисперсия ($\gamma \ll 1$), приводящая к ее размытию, могут компенсировать друг друга. При этом будет возникать стационарная нелинейная волна, распространяющаяся без изменения формы с постоянной скоростью.

Периодическое решение уравнения Кортевега–де Вриза с помощью эллиптической функции Якоби имеем вид [Уизем, 1976]

$$u(x, t) = \varepsilon \times cn^2 \left[\sqrt{\frac{3\gamma}{4H^2}} \times (x - Ut) \right], \quad (3.2.18)$$

где $U = c(1 - \gamma/2)$ — скорость распространения волны, $cn(z) = \cos(\varphi) = \sqrt{1 - x^2}$ — эллиптическая функция Якоби [Двайт, 1983], [Абрамовиц, 1979].

Модуль m эллиптической функции равен $m = \sqrt{\varepsilon/\gamma}$, а длина волны

$$\lambda = \frac{4H}{\sqrt{3\gamma}} \times K(m),$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Из-за эллиптической функции Якоби $\operatorname{cn}(z)$ Кортевег–де Вриза назвали эти решения *кноидальными волнами*. Модуль m дает сравнительную оценку эффектов нелинейности и дисперсии. В линейном пределе $m \rightarrow 0$ в выражении (3.2.18) $\operatorname{cn}(x) \rightarrow \cos x$, при $m \rightarrow 1$ $\operatorname{cn}(x) \rightarrow \operatorname{sech} h(x)$, что соответствует уединенной волне (солитону).

Решения уравнения Кортевега–де Вриза являются корректными при значениях $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$, когда ε и γ малы. Кноидальные волны ограничены по высоте и являются фактически по форме периодической последовательностью солитонов (рис. 3.2.1).

Баланс между нелинейностью и дисперсией часто задается с помощью критерия (числа) Урселла:

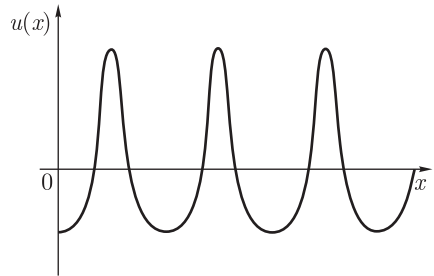


Рис. 3.2.1. Кноидальные волны

$$Ur = \frac{3\varepsilon}{4\gamma}. \quad (3.2.19)$$

Безразмерный параметр Ur впервые появился в работе Дж. Стокса [Stokes, 1849]. Однако его более подробно, как меру отношения нелинейности к дисперсии, описал Ф. Урселл [Ursell, 1966].

3.3. Решение нелинейного уравнения методом последовательных приближений

Неизменность форм кноидальных волн не позволяет проследить динамику нелинейных поверхностных гравитационных волн при распространении по мелководью.

Для слежения за динамикой процесса распространения поверхностных гравитационных волн рассмотрим уравнение с учетом квадратичной нелинейности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.3.1)$$

Уравнение (3.3.1) является частью уравнения Кортевега–де Вриза (3.2.16) без учета дисперсии волн. Пока влиянием дисперсии мы пренебрегаем, в дальнейших рассмотрениях она будет учитываться в первоначальном виде через известный закон дисперсии в выражении (3.2.13). Можно отметить, что влияние дисперсии становится более

ощутимым для высших гармоник основной волны, которые приводят к укручению профиля волны.

Как известно, классическим и наиболее прямым путем решения нелинейных уравнений является решение методом последовательных приближений [Лемб, 1948; Виноградова, Руденко, 1979; Аббасов, 2007]. Как уравнение мелкой воды, так и метод последовательных приближений стоят у истоков рождения нелинейных волновых явлений. Этим уравнением и методом в середине XIX века описывали приливные волны Г. Эйри и волны конечной амплитуды Дж. Стокс [Stokes, 1847]. Однако, процесс генерации высших гармоник, приводящий к заострению профиля волны, не всегда удовлетворяет закону сохранения энергии. Рост высших гармоник не учитывает уменьшение энергии основной волны.

При выполнении условий мелководности $H/\lambda \ll 1$, когда горизонтальная скорость частиц ϑ_x в $1/kH$ раз больше вертикальной ϑ_z , параметр нелинейности ε определяется выражением $\varepsilon = \vartheta_x/c = a/H$ [Бреховских, 1982].

Пусть при $t = 0$ задано возмущение

$$u(x, 0) = \varepsilon U_0 \exp(ikx) + \text{к.с.},$$

где к.с. — слагаемое комплексно-сопряженное первому, которое вводится в нелинейных задачах для учета вещественности u .

Будем искать решение уравнения (3.3.1) методом последовательных приближений в виде разложения по малому параметру ε ($\varepsilon \ll 1$), ограничиваясь первыми двумя членами

$$u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)}, \quad (3.3.2)$$

причем считаем, что $u^{(n+1)} \ll u^{(n)}$ [Виноградова, Руденко, 1979].

Подставляем выражение (3.3.2) в уравнение (3.3.1):

$$\frac{\partial(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon u^{(2)})}{\partial t} + c \frac{\partial(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon u^{(2)})}{\partial x} = -\varepsilon(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon u^{(2)}) \frac{\partial(\varepsilon u^{(1)} + \varepsilon u^{(2)})}{\partial x}.$$

Для членов, содержащих ε в первом приближении, получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + c \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = 0. \quad (3.3.3)$$

Решением уравнения (3.3.3) при начальных условиях $t = 0$, $u^{(1)}(x, 0) = U_0 \exp(ikx) + \text{к.с.}$, будет функция

$$u^{(1)}(x, t) = U_0 \exp[i(kx - \omega t)] + \text{к.с.} \quad (3.3.4)$$

Приравнявая теперь во втором приближении члены с ε^2 , для $u^{(2)}$ получаем неоднородное линейное уравнение

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + c \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\partial u^{(1)2}}{2\partial x}. \quad (3.3.5)$$

Правая часть этого уравнения является решением линейного уравнения (3.3.3) для $u^{(1)}$. Для нахождения решения $u^{(2)}(x, t)$ возведем в квадрат выражение (3.3.4) для $u^{(1)}(x, t)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)2}(x, t) &= (U_0 \exp[i(kx - \omega t)] + U_0 \exp[-i(kx - \omega t)])^2 = \\ &= U_0^2 \exp[2i(kx - \omega t)] + 2U_0^2 \exp[i(kx - \omega t) - i(kx - \omega t)] + \\ &\quad + U_0^2 \exp[-2i(kx - \omega t)] = 2U_0^2 + U_0^2 \exp[2i(kx - \omega t)] + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Продифференцируем полученное выражение по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)2}(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial(2U_0^2)}{\partial x} + \frac{\partial(U_0^2 \exp[2i(kx - \omega t)])}{\partial x} + \frac{\partial(U_0^2 \exp[-2i(kx - \omega t)])}{\partial x} = \\ &= 2ikU_0^2 \exp[2i(kx - \omega t)] + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Уравнение (3.3.5) с учетом проведенных преобразований примет вид

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + c \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = -ikU_0^2 \exp[i(2kx - 2\omega t)] + (\text{к.с.}).$$

Решение для $u^{(2)}(x, t)$ при отсутствии дисперсии (с начальным условием $u^{(2)}(x, 0) = 0$) будет иметь следующий вид:

$$u^{(2)}(x, t) = -iktU_0^2 \exp[i(2kx - 2\omega t)] + \text{к.с.} \quad (3.3.6)$$

Тогда общее решение для горизонтальной скорости частиц с учетом первого (3.3.4) и второго (3.3.5) приближений примет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varepsilon u^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x, t) = \\ &= \varepsilon U_0 \exp[i(kx - \omega t)] - ikt\varepsilon^2 U_0^2 \exp[i(2kx - 2\omega t)] + \text{к.с.} \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

Анализируя выражение (3.3.7), можно отметить, что амплитуда основной гармоники остается постоянной, а амплитуда второй гармоники растет линейно со временем (из-за векового члена). Поэтому в отсутствии дисперсии при любом как угодно малом значении ε наступит момент неустойчивости (обрушения) волны, который определяется путем приравнивания амплитуд членов $\varepsilon u^{(1)}$ и $\varepsilon^2 u^{(2)}$:

$$\varepsilon U_0 = \varepsilon^2 kt_{\text{хар}}^{(1)} U_0^2.$$

Отсюда время, через которое наступит неустойчивость:

$$t_{\text{хар}}^{(1)} = 1/\varepsilon k U_0. \quad (3.3.8)$$

Следует отметить, что к этому моменту метод последовательных приближений уже будет неприемлемым, так как нарушится первичное условие $u^{(n+1)} \ll u^{(n)}$.

Однако до этого момента, с ростом второй гармоники начнет усиливаться ее взаимодействие с основной гармоникой. Это взаимодействие приведет к возбуждению третьей, четвертой и т.д. гармоник.

Следовательно, со временем в спектре волн будут возникать все более высокие частоты, которые приведут к трансформации профиля волны, к заострению гребней и укручению ее фронта.

Для выявления этих изменений поищем решение уравнения (3.3.1) методом последовательных приближений с новыми начальными условиями

$$u_{\text{вт.}}(x, t) = \varepsilon u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t). \quad (3.3.9)$$

Тогда выражение для горизонтальной скорости частиц среды в первом приближении будет иметь вид

$$u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t) = u(x, t) = \varepsilon U_0 \exp[ikx] - ikt\varepsilon^2 U_0^2 \exp[i2kx] + \text{к.с.} \quad (3.3.10)$$

(временной множитель $\exp[i\omega t]$ здесь и далее опускаем).

Неоднородное линейное уравнение для новых начальных условий будет иметь вид

$$\frac{\partial u_{\text{вт.}}^{(2)}}{\partial t} + c \frac{\partial u_{\text{вт.}}^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\partial u_{\text{перв.}}^{(1)2}}{2\partial x}. \quad (3.3.11)$$

Возведем в квадрат решение для первого приближения (3.3.10), для удобства обозначив $\varepsilon U_0 = A_1$, $-ikt\varepsilon^2 U_0^2 = A_2$:

$$\begin{aligned} u_{\text{перв.}}^{(1)2}(x, t) = & [A_1 \exp[ikx] + A_2 \exp[i2kx] + A_1 \exp[-ikx] + \\ & + A_2 \exp[-i2kx]]^2 = A_1^2 \exp[i2kx] + A_1 A_2 \exp[ikx + i2kx] + \\ & + A_1^2 \exp[0] + A_1 A_2 \exp[ikx - i2kx] + A_2 A_1 \exp[i2kx + ikx] + \\ & + A_2^2 \exp[i4kx] + A_2 A_1 \exp[i2kx - ikx] + A_2^2 \exp[0] + \\ & + A_1^2 \exp[0] + A_1 A_2 \exp[-ikx + i2kx] + A_1^2 \exp[-i2kx] + \\ & + A_1 A_2 \exp[-ikx - i2kx] + A_2 A_1 \exp[-i2kx + ikx] + A_2^2 \exp[0] + \\ & + A_2 A_1 \exp[-i2kx - ikx] + A_2^2 \exp[-i4kx] = 2A_1^2 + 2A_2^2 + \\ & + (A_1^2 \exp[i2kx] + \text{к.с.}) + (A_2^2 \exp[i4kx] + \text{к.с.}) + \\ & + (2A_1 A_2 \exp[i3kx] + \text{к.с.}) + (2A_1 A_2 \exp[ikx] + \text{к.с.}). \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Продифференцируем выражение (3.3.12) по координате x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{перв.}}^{(1)2}}{\partial x} = & [i2k A_1^2 \exp[i2kx] + i4k A_2^2 \exp[i4kx] + \\ & + i3k \cdot 2A_1 A_2 \exp[i3kx] + ik \cdot 2A_1 A_2 \exp[ikx]] + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Подставляем значения параметров A_1 , A_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{перв.}}^{(1)2}}{\partial x} = & [i2k \cdot \varepsilon^2 U_0^2 \exp[i2kx] + i4k(-k^2 t^2 \varepsilon^4 U_0^4) \exp[i4kx] + i3k \cdot 2 \cdot \varepsilon \times \\ & \times U_0(-ikt\varepsilon^2 U_0^2) \exp[i3kx] + ik \cdot 2 \cdot \varepsilon U_0 \cdot (-ikt\varepsilon^2 U_0^2) \exp[ikx]] + \text{к.с.} = \\ & = [2ik\varepsilon^2 U_0^2 \exp[i2kx] - 4ik^3 t^2 \varepsilon^4 U_0^4 \exp[i4kx] + \\ & + 6k^2 t \varepsilon^3 U_0^3 \exp[i3kx] + 2k^2 t \varepsilon^3 U_0^3 \exp[ikx]] + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Решение для второго приближения примет вид:

$$u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t) = [ikt\varepsilon^3 U_0^2 \exp(2ikx) - 2ik^3 t^3 \varepsilon^4 U_0^4 \exp(4ikx) + \\ + 3k^2 t^2 \varepsilon^3 U_0^3 \exp(3ikx) + k^2 t^2 \varepsilon^3 U_0^3 \exp(ikx)] + \text{к.с.} \quad (3.3.15)$$

Анализируя выражение (3.3.15), можно отметить, что в результате взаимодействия основной волны k со второй $2k$ возникают вторичные волны не только с удвоенными значениями $2k$ и $4k$, но и комбинационные волны k и $3k$. Соответственно в спектре исходной волны со временем появляются вторая, третья и четвертая гармоники, что приведет к искажению профиля волны.

Следует подчеркнуть, что каждая волна имеет свою зависимость от времени и в наборе вторичных волн возникает волна с частотой основной волны, которая имеет квадратичную зависимость от времени.

После подстановки выражений (3.3.10) и (3.3.15) в выражение (3.3.9) получим окончательное решение в двух приближениях для горизонтальной скорости частиц среды:

$$u_{\text{вт.}}(x, t) = [\varepsilon^2 U_0 \exp(ikx) - ikt\varepsilon^3 U_0^2 \exp(2ikx)] + \\ + [k^2 t^2 \varepsilon^5 U_0^3 \exp(ikx) + ikt\varepsilon^4 U_0^2 \exp(2ikx) + \\ + 3k^2 t^2 \varepsilon^5 U_0^3 \exp(3ikx) - 2ik^3 t^3 \varepsilon^6 U_0^4 \exp(4ikx)] + \text{к.с.} \quad (3.3.16)$$

Согласно выражению (3.3.16) по истечении определенного промежутка времени в результате быстрого роста амплитуд второго слагаемого выражения (3.3.9) наступит неустойчивость волны, так как второе слагаемое содержит более высокие степени зависимости от времени. Это характерное время также можно определить путем приравнивания слагаемых:

$$\varepsilon u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t_{\text{хар.}}^{(2)}) = \varepsilon^2 u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t_{\text{хар.}}^{(2)}), \quad (3.3.17)$$

т.е. учитывая, что в этот момент сумма амплитуд вторичных волн становится равной сумме амплитуд первичных. Но в отличие от выражения (3.3.8) зависимость здесь имеет более сложный вид, поэтому аналитическое определение выражения для характерного времени $t_{\text{хар.}}^{(2)}$ для данного взаимодействия будет достаточно трудоемким, поэтому в дальнейших исследованиях воспользуемся графическим способом.

3.4. Моделирование распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье

Для исследования нелинейных волновых эффектов на мелководье в качестве модели воспользуемся гидрологическими условиями Таганрогского залива Азовского моря. Средняя глубина Таганрогского залива не превышает 5 м [Мамыкина, 1980], поэтому условиям мелководности будут удовлетворять гравитационные волны с длинами свыше 30 м. Дно ровное, поверхностное натяжение отсутствует. В качестве

исходных поверхностных волн рассматриваются волны зыби, т.е. влияние ветра не учитывается.

Как известно, безвихревые поверхностные гравитационные волны опрокидываются при отношении высоты к ее длине $2a/\lambda = 0,141$ [Лемб, 1947; Сретенский, 1977], хотя реальные волны опрокидываются и при меньшей крутизне [Benjamin, 1967]. Поэтому мы воспользуемся начальными значениями крутизны в пределах от 0,01 до 0,05.

Для слежения за энергетическими параметрами гравитационных волн воспользуемся выражением (2.3.23):

$$E_n = \frac{\rho_0 g}{4} \lambda_n a_n^2 = \frac{\rho_0 g}{4} \lambda_n \left(\frac{U_{n0} k_n H}{\omega_n} \right)^2 \quad (3.4.1)$$

(с учетом соотношения $a_n = (U_{n0} k_n H / \omega_n)$), где ρ_0 — плотность жидкости, n — номер соответствующей гармоники $n = 1, 2, 3, 4$.

Проследим изменения профиля гравитационной волны после вхождения в залив с исходными параметрами: частота $f = 0,2$ Гц; длина $\lambda = 35$ м; скорость распространения $c = 7$ м/с; начальная крутизна — $2a/\lambda = 0,024$; $a = 0,413$ м; $kH = 0,89$; $\varepsilon = 0,083$.

Необходимо определить пространственный (временной $-t_{\text{хар.}}^{(2)}$) промежуток $x_{\text{хар.}}^{(2)}$. Это расстояние находим графическим способом на основе выражения (3.3.17), в нашем случае для гравитационной волны с приведенными начальными условиями оно составляет $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 10$ км.

Но прежде, чем перейти к расчетам, следует отметить некоторые физические особенности происходящих волновых процессов. В выражении (3.3.16) амплитуды всех гармоник (кроме основной) со временем растут. Однако, согласно данному выражению, амплитуда основной гармоники при этом остается постоянной, хотя высшие гармоники энергетически подпитываются от основной гармоники.

Следовательно, амплитуда первичных волн в выражении (3.3.16) $u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t)$ должна со временем уменьшаться. Поэтому для исследования искажений профиля гравитационной волны необходимо учитывать эти физические особенности волновых процессов (в противном случае это приведет к нарушению закона сохранения энергии).

Как известно, при отсутствии диссипации энергии первичных и вторичных волн должны отвечать закону сохранения энергии:

$$E_1^{(1)}(x) + E_2^{(1)}(x) = E_1^{(2)}(x) + E_2^{(2)}(x) + E_3^{(2)}(x) + E_4^{(2)}(x), \quad (3.4.2)$$

где $E_n^{(1)}(x)$, $E_n^{(2)}(x)$ — энергии соответственно первичных и вторичных волн.

Закон спадаания амплитуд первичных волн должен удовлетворять следующему условию:

$$E_{\text{перв.}}^{(1)}(x) = E - E_{\text{вт.}}^{(2)}(x), \quad (3.4.3)$$

где $E_{\text{перв.}}^{(1)}(x)$, $E_{\text{вт.}}^{(2)}(x)$ — суммарная энергия первичных и вторичных волн, E — энергия основной гармоники, полученная согласно выражению (3.4.1):

$$E = \frac{\rho_0 g}{4} \frac{2\pi}{k} \left(\frac{U_0 k H}{\omega} \right)^2 = \frac{\pi \rho_0 g}{2\omega} \left(\frac{k}{\omega} \right) (U_0 H)^2 = \left(\frac{\pi \rho_0 g}{2\omega c} \right) (U_0 H)^2, \quad (3.4.4)$$

амплитуды скорости $U_0 = (\omega a/k H)$, амплитуда смещений свободной поверхности a определяется из выражения для крутизны: $2a/\lambda$.

Для поиска амплитуды горизонтальной скорости при известной энергии воспользуемся выражением (3.4.4) (по обратной зависимости):

$$U_{\text{перв.}}^{(1)} = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2\omega c}{\rho_0 g \pi}} \cdot E_{\text{перв.}}^{(1)}. \quad (3.4.5)$$

Однако данное значение амплитуды горизонтальной скорости является суммой амплитуд основной и второй гармоник (выражение (3.3.10)). При этом закон спада амплитуды основной гармоники находим на основе выражения (3.3.16), которое содержит зависимости от времени до третьей степени. Тогда амплитуду второй гармоники найдем через разность суммарной амплитуды первичных волн и амплитуды основной гармоники:

$$U_2^{(1)} = U_{\text{перв.}}^{(1)} - U_1^{(1)}. \quad (3.4.6)$$

На рис. 3.4.1а представлены графики скоростей первичных $u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t)$ и вторичных $u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t)$ волн, а также основной $u_1^{(1)}(x, t)$ и второй $u_2^{(1)}(x, t)$ гармоник. Для удобства они представлены в зависимости от расстояния x .

Как было уже отмечено, неустойчивость наступает на расстоянии $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 10$ км (т. е. через $t_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 24$ мин.). Однако наша модель является корректной до расстояния $x \approx 6$ км, т. е. до тех пор, пока выполняется первичное условие $u^{(n+1)} \ll u^{(n)}$, когда значение для второго приближения на порядок меньше значения для первого приближения.

На основе анализа рис. 3.4.1а, можно отметить, что с ростом суммарной амплитуды вторичных волн амплитуда первичных волн и основной гармоники падают. Амплитуда второй гармоники медленно нарастает, а к моменту неустойчивости резко — падает. Таким образом, закон сохранения энергии для данного волнового процесса полностью соблюдается.

Рассмотрим изменение профиля исходной гравитационной волны до расстояния $x \approx 6$ км. На рис. 3.4.1б и 3.4.1в представлены зависимости изменения горизонтальной скорости $u(x, t)$ от расстояния пробега с учетом выражения (3.3.16), вертикальный масштаб увеличен.

Волна с изначально косинусоидальным профилем за время пробега постепенно искажается, гребни заостряются, а впадины становятся все более пологими. Это является результатом возрастающего влияния высокочастотных гармоник. Обрушение такой волны может происходить

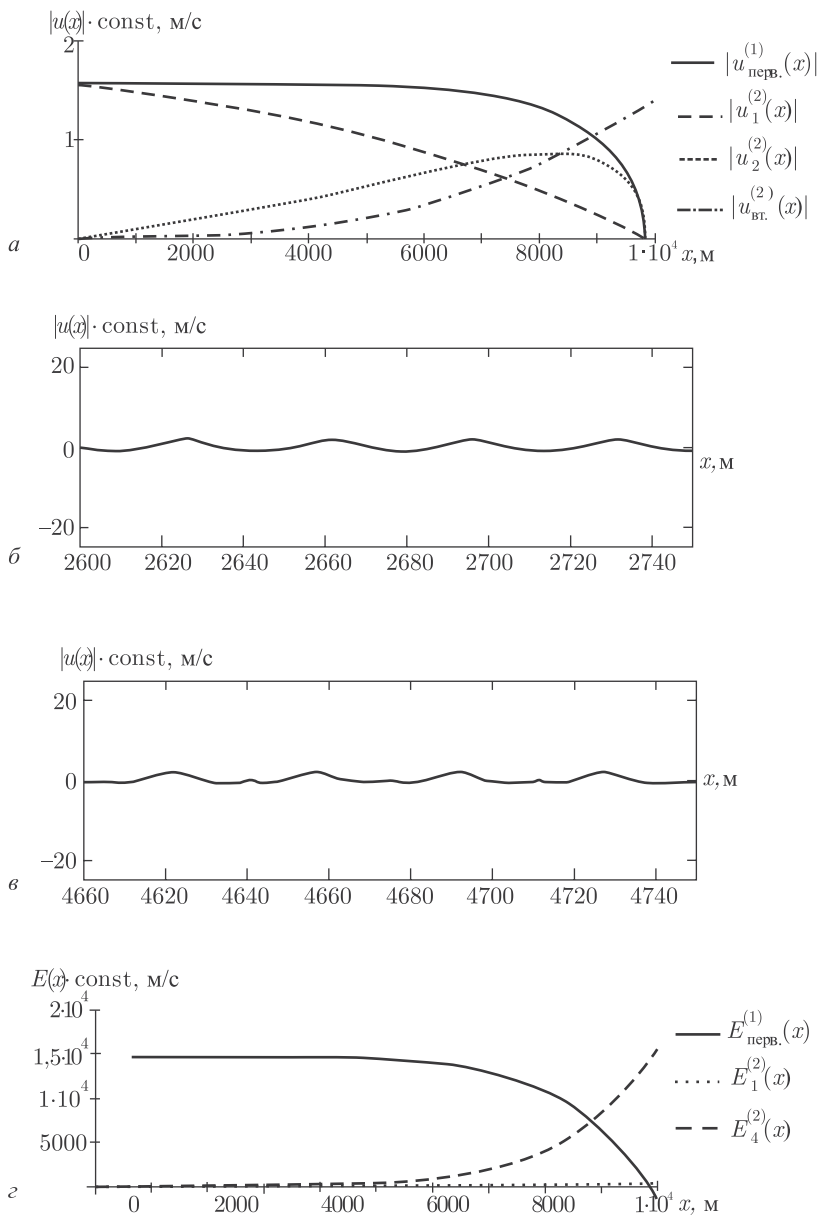


Рис. 3.4.1. Основные характеристики поверхностной гравитационной волны с параметрами: $f = 0,2$ Гц; $\lambda = 35$ м; $c = 7$ м/с; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,024$; $kH = 0,89$; $\varepsilon = 0,083$; $\gamma = 0,02$

в виде буруна, соскальзывающего с гребня [Монин, 1985]. Причиной обрушения в нашем случае, естественно, является глубина жидкости.

Энергетические характеристики волнового процесса приведены на рис. 3.4.1г, где представлены зависимости энергии первичных и вторичных волн от расстояния x . Энергия первичных волн $E_{\text{перв.}}^{(1)}(x)$ к моменту неустойчивости падает, соответственно энергии вторичных волн $E_1^{(2)}(x)$, $E_2^{(2)}(x)$, $E_3^{(2)}(x)$ и $E_4^{(2)}(x)$ растут. При этом происходит полная перекачка энергии от первичных волн ко вторичным. По графику быстрее всех растет энергия четвертой гармоники — $E_4^{(2)}(x)$, которая имеет наибольшую степень зависимости от времени.

На рис. 3.4.2 представлены графики роста амплитуд скоростей вторичных волн от расстояния. Здесь достаточно наглядно можно увидеть соотношение между гармониками.

Среди вторичных волн быстрее всех растет амплитуда скорости четвертой гармоники, далее третьей, первой и второй. Эта закономерность наблюдается также и для гравитационных волн с другими начальными условиями.

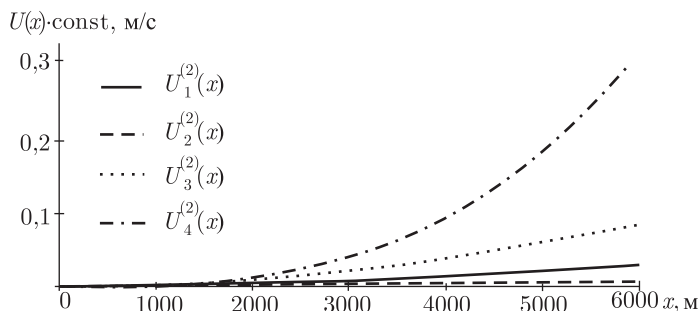


Рис. 3.4.2. Нарастание амплитуд вторичных волн поверхностной гравитационной волны с параметрами: $f = 0,2$ Гц; $\lambda = 35$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,024$; $kH = 0,89$; $\varepsilon = 0,083$; $\gamma = 0,02$

На рис. 3.4.3а–г представлены основные характеристики другой поверхностной волны с параметрами: частота $f = 0,09$ Гц; длина $\lambda = 77,8$ м; начальная крутизна $2a/\lambda = 0,014$; $a = 0,537$ м; $kH = 0,4$. Согласно рис. 3.4.3а для данной волны неустойчивость наступает также на расстоянии $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 10$ км. Несмотря на то, что эта волна имеет меньшую крутизну по сравнению с предыдущей, она из-за большей длины также приходит в неустойчивость на таком же расстоянии.

На рис. 3.4.4а–г представлены основные характеристики этой же волны с большим значением начальной крутизны $2a/\lambda = 0,015$, что увеличивает нелинейный параметр $\varepsilon = 0,118$. Это приводит к уменьшению расстояния неустойчивости, которая наступает уже

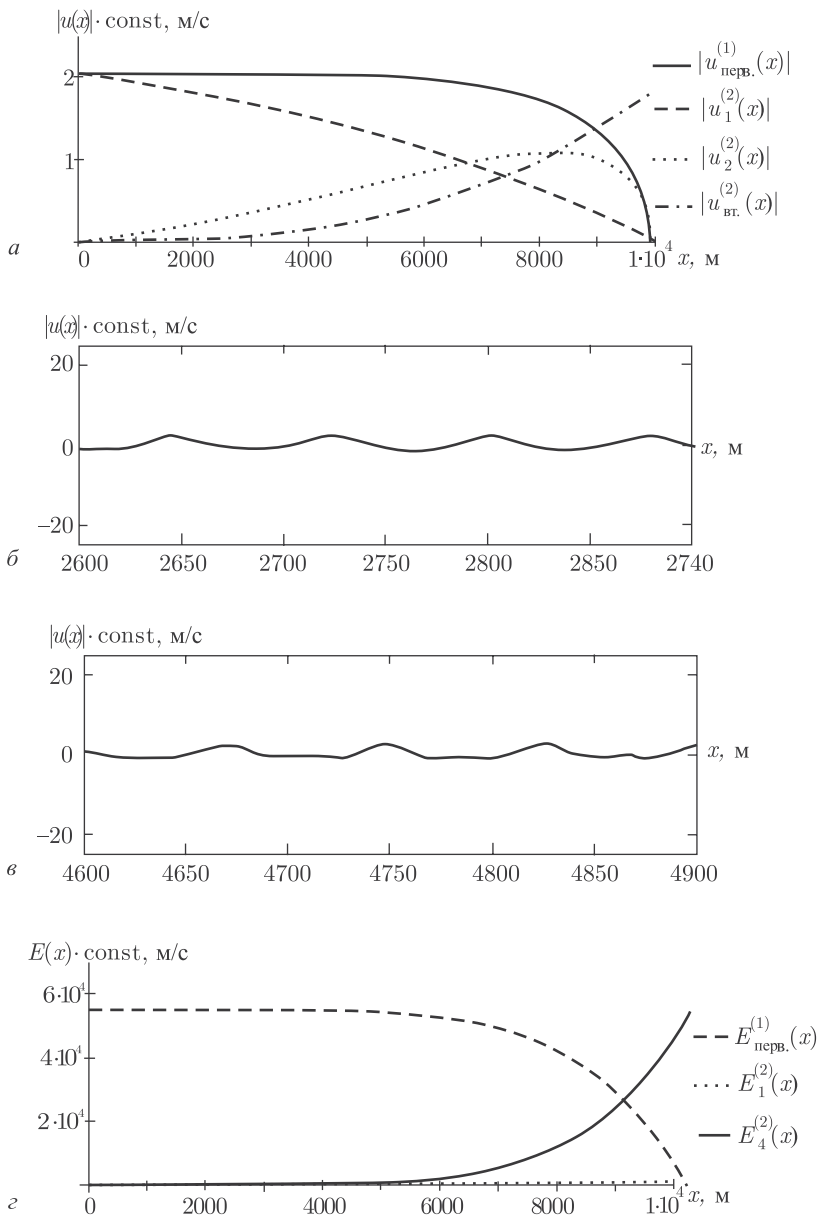


Рис. 3.4.3. Основные характеристики поверхностной гравитационной волны с параметрами: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,014$; $kH = 0,4$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,004$

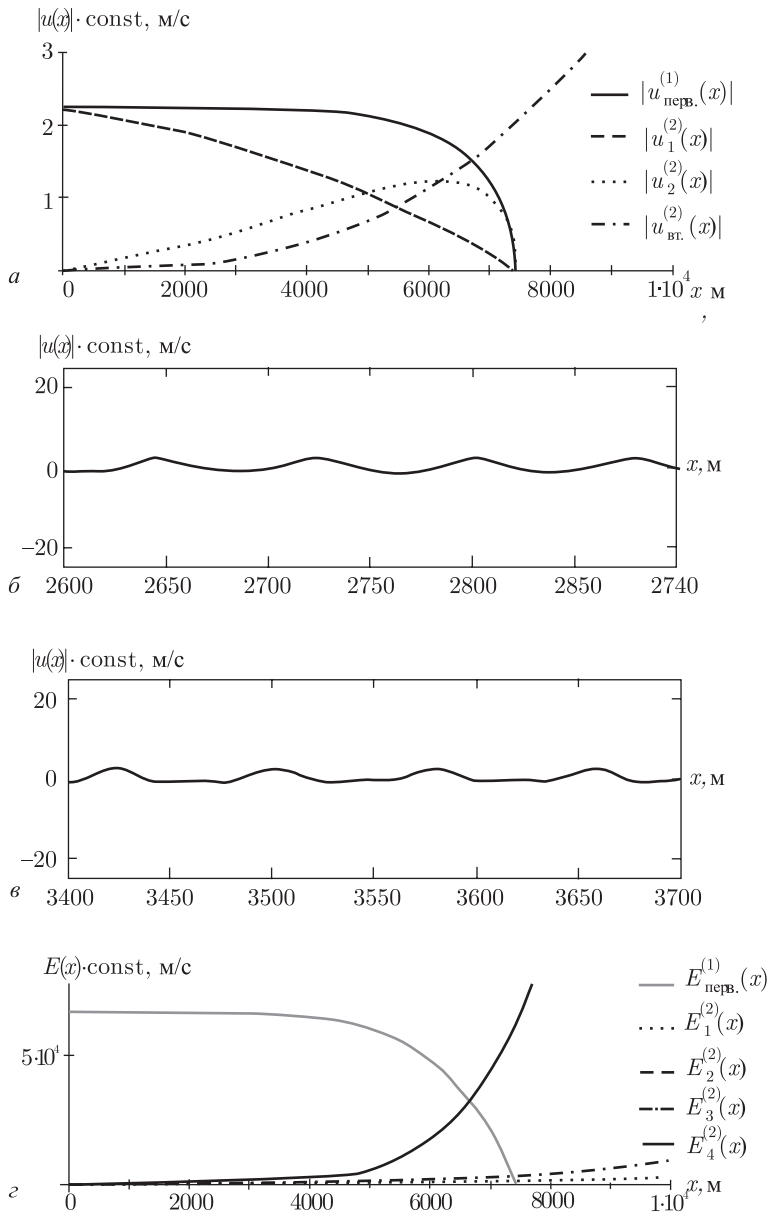


Рис. 3.4.4. Основные характеристики поверхностной гравитационной волны с параметрами: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,015$; $kH = 0,4$; $\varepsilon = 0,118$; $\gamma = 0,004$

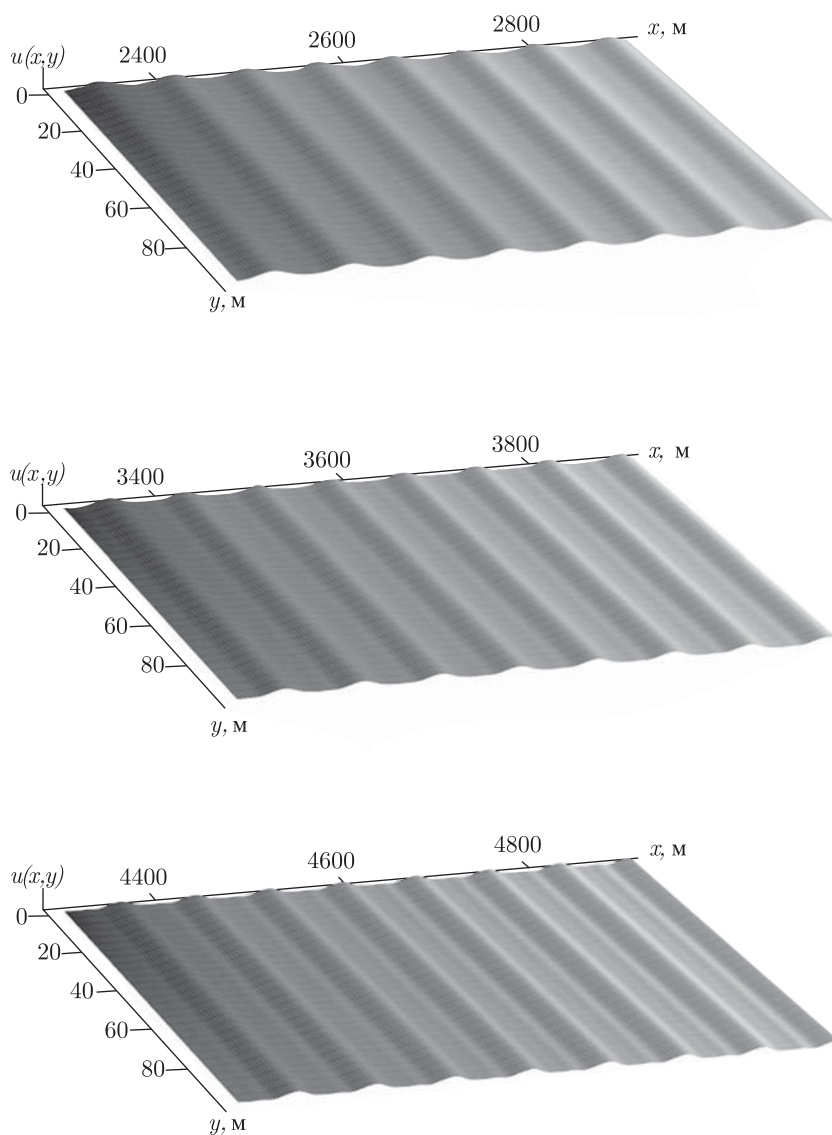


Рис. 3.4.5. Пространственная модель распространения поверхностной гравитационной волны с параметрами: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,014$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,004$

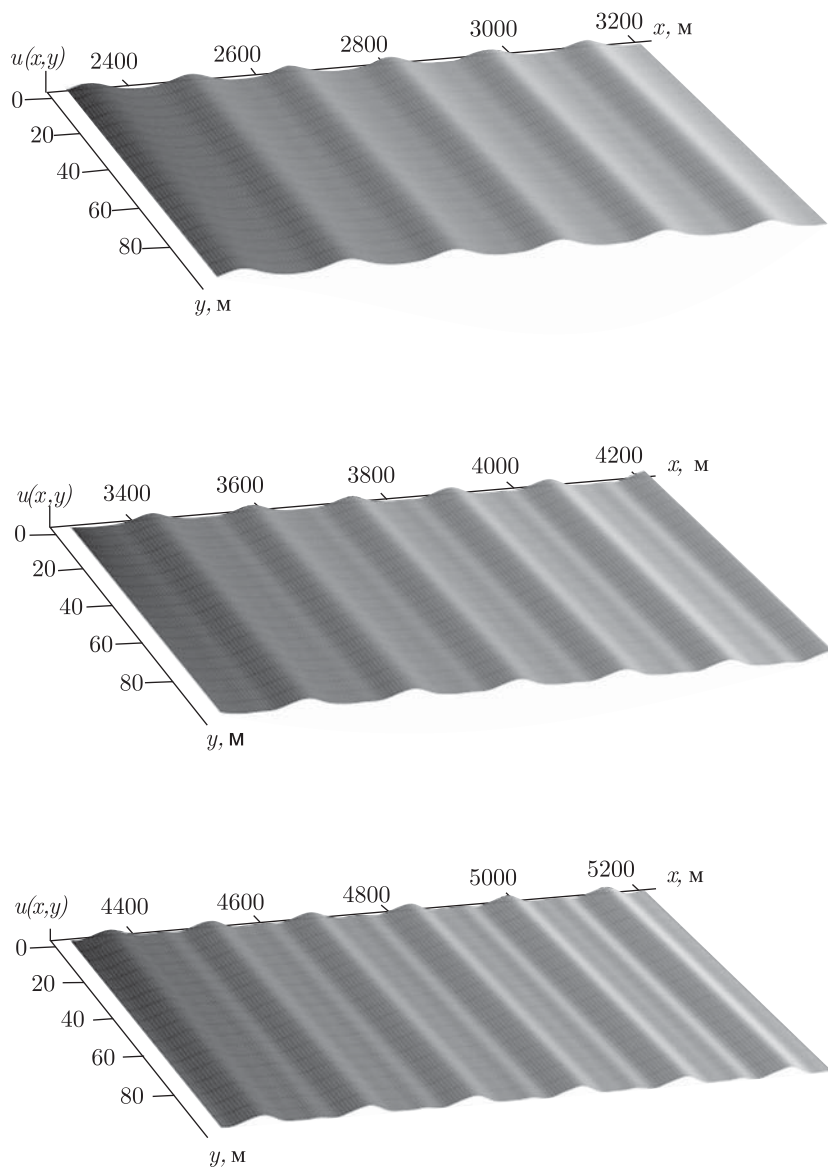


Рис. 3.4.6. Пространственная модель распространения поверхностной гравитационной волны с параметрами: $f = 0,045$ Гц; $\lambda = 155,6$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,0088$; $\varepsilon = 0,136$; $\gamma = 0,001$

на расстоянии $x_{\text{хар}}^{(2)} \approx 7,5$ км, а корректной наша модель является до расстояния $x \approx 4$ км.

С увеличением начальной крутизны расстояние неустойчивости уменьшается, с увеличением частоты волны (при постоянной крутизне) это расстояние увеличивается, так как уменьшается значение нелинейного параметра.

На рис. 3.4.5 представлены пространственно-трехмерные модели распространения по заливу поверхностной гравитационной волны, основные характеристики которой были приведены на рис. 3.4.3: $\lambda = 77,8$ м; $2a/\lambda = 0,014$. Для расчетов использовался участок залива со следующими параметрами: глубина $H = 5$ м; протяженность по оси $x = 10$ км; по оси $y = 100$ м, шаг сетки 3,5 м; масштабы по осям y и z увеличены.

На трех участках распространения достаточно наглядно продемонстрировано постепенное искажение профиля гравитационной волны, гребни которой по мере распространения становятся все круче.

На рис. 3.4.6 представлены пространственно-трехмерные модели распространения по заливу поверхностной гравитационной волны с параметрами: $\lambda = 155,6$ м; $2a/\lambda = 0,0088$. Эта волна имеет вдвое больше длину (относительно предыдущей волны), расстояние неустойчивости также составляет $x_{\text{хар}}^{(2)} \approx 10$ км.

Следует подчеркнуть, что для возникающих высших гармоник условие мелководности может и не соблюдаться. А это может привести к появлению дисперсии скорости распространения, что может вызвать торможение нелинейных процессов [Уизем, 1976]. Но при подходе к берегу из-за уменьшения глубины условие мелководности будет выполняться лучше и, следовательно, произойдет обрушение волны.

Укручение переднего фронта волны

Анализируя построенные профили поверхностных гравитационных волн, необходимо отметить следующие их особенности. Из натуральных наблюдений известно, что профиль реальных поверхностных волн асимметричен: гребни относительно крутые и короткие, заостренные, а впадины пологие и широкие [Лемб, 1947]. Орбитальные движения частиц также асимметричны: их скорость под гребнями выше, чем под ложбинами. Эти особенности объясняются теорией Стокса появлением высокочастотных гармоник основной волны. Такие профили приобретают поверхностные волны для нашего рассмотрения на начальных участках распространения, что можно наблюдать на рис. 3.4.1б, 3.4.3б, 3.4.4б. На этом этапе генерация высших гармоник приводит к заострению гребней, при этом сами гребни еще остаются симметричными относительно вертикальной оси.

Кроме описанного типа асимметрии, еще наблюдается другой тип асимметрии профиля реальных поверхностных волн. Он выражается в том, что передний склон трансформирующейся волны становится

более крутым, чем задний [Flick, 1981; Peregrine, 1967; Zharov, 1998]. Это различие в крутизне склонов увеличивается с приближением к берегу. Этот тип асимметрии профиля реальных поверхностных волн не описывается теорией Стокса, а также большинством других теорий. Однако для описания процесса набегания волн из открытого моря на берег Дж. Уиземом было предложено уравнение с интегральным членом на основе уравнения Кортевега–де Вриза. На этапе обрушения волн действие интегрального члена становится незначительным и решения уравнения Уизема ведут себя аналогично решениям простейших уравнений с нелинейностью (аналогично уравнению (3.3.1)), опрокидываясь и разрушаясь за конечное время [Уизем, 1977; Габов, 1988].

Для нашего рассмотрения профили поверхностных волн на третьем участке распространения как раз и приобретают второй вид асимметрии, рис. 3.4.1в, 3.4.3в, 3.4.4в. При этом укрупнение становится все более выраженным с увеличением длины волны, т.е. с увеличением коэффициента нелинейности.

Одно из объяснений укрупнения переднего склона гребня заключается в том, что высшие гармоники постепенно смещаются по фазе относительно основной волны [Flick, 1981; Lonquet-Higgins, 1993; Zharov, 1998; Леонтьев, 2001; Кузнецов, 2005]. Когда сдвиг фаз достигает значения $\pi/2$, передний склон становится почти вертикальным, в результате чего волна может обрушиться. В полученном нами окончательном выражении для горизонтальной скорости частиц (3.3.16) амплитуды четных гармоник являются мнимыми. С возрастанием амплитуды вторичных волн эта мнимость начинает ощущаться сильнее, чем в начале, так как она приводит к сдвигу фаз относительно амплитуды основной волны. Следует отметить, что в теории Стокса разность фаз между основной волной и высшими гармониками отсутствует, т.е. она не может описывать эти процессы (выражение 2.2.9).

Для выявления влияния четных гармоник, а особенно четвертой гармоники на профиль поверхностной гравитационной волны на рис. 3.4.7 представлены графики горизонтальной скорости $u(x, t)$ частиц среды для одинакового участка пути распространения. Особое влияние четвертой гармоники связано с ее наиболее быстрым ростом, следовательно, наибольшей энергоемкостью среди вторичных волн.

На рис. 3.4.7а приведен профиль поверхностной волны, рассчитанный согласно выражению (3.3.16), когда четвертая гармоника по фазе отстает от основной волны на $\pi/2$. На рис. 3.4.7б представлен профиль волны для случая, когда мнимость амплитуды четвертой гармоники заменена на вещественность, т.е. фазовый сдвиг между гармоникой и основной волной отсутствует. При этом амплитуда четвертой гармоники имеет отрицательный знак, следовательно, вычитается от амплитуды основной волны. Это приводит к симметричности гребня волны относительно вертикальной оси.

В выражении (3.3.16) амплитуда только четвертой гармоники имеет отрицательный знак. Замена отрицательного знака на положительный

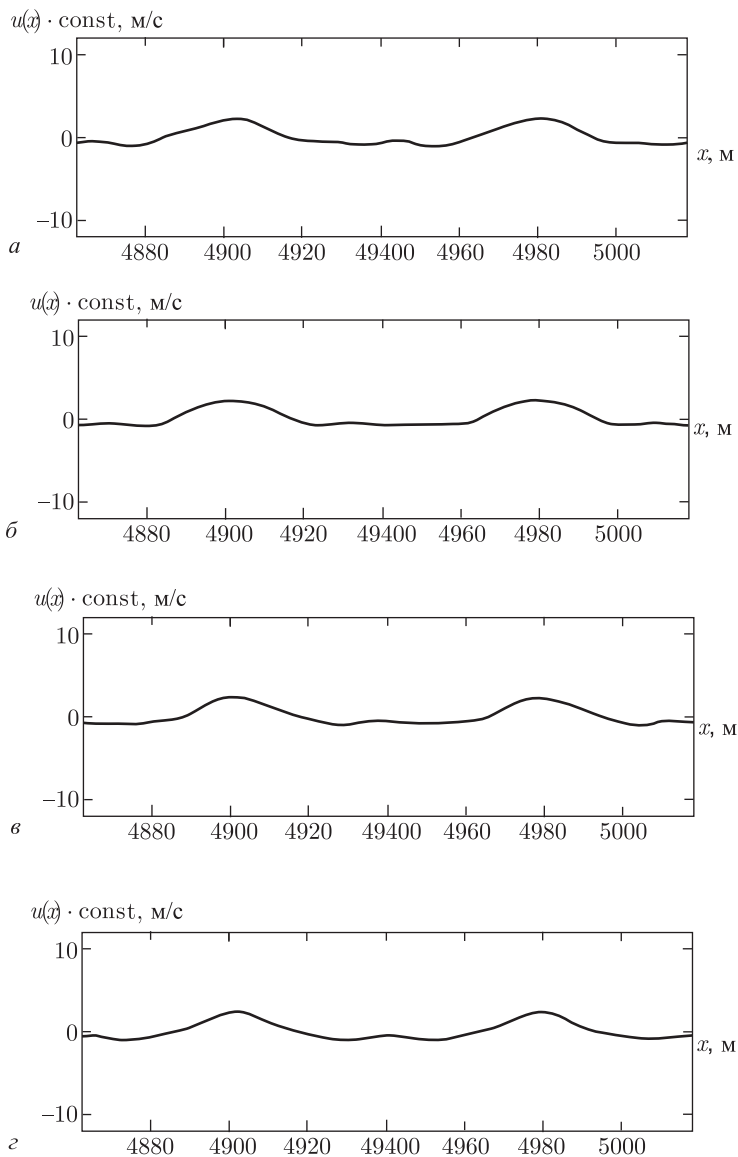


Рис. 3.4.7. Влияние четвертой гармоники на профиль поверхностной гравитационной волны: *а* — четвертая гармоника отстает от основной волны на $\pi/2$; *б* — синфазно вычитается; *в* — опережает основную волну на $\pi/2$; *г* — синфазно суммируется. Параметры волны: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $c = 7$ м/с; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,014$; $kH = 0,4$; $\varepsilon = 0,107$

знак приводит к смене укручения переднего фронта гребня волны на задний фронт. Этот случай представлен на рис. 3.4.7в, на котором график напоминает профиль волны, повернутой вспять, волна распространяется в обратном направлении. В данном случае четвертая гармоника опережает по фазе основную волну на $\pi/2$.

Если в выражении (3.3.16) одновременно заменить отрицательный знак на положительный, а также мнимость четвертой гармоники на вещественность, то профиль волны принимает вид как на рис. 3.4.7г. В этом случае амплитуда четвертой гармоники суммируется с амплитудой основной волной синфазно, усиливая заострение гребня волны. Данный профиль напоминает стоксовые волны конечной амплитуды на глубокой воде (или трохоидаальную волну).

Следует обратить внимание также на появление местного возвышения в ложбине между гребнями. Это возвышение тоже связано с четвертой гармоникой, и оно меняет свою локализацию в зависимости от фазы. Экспериментальные наблюдения с появлением возвышения между основными гребнями волны в береговой зоне представлены в работах [Goda, 1998; Kawasaki, 1999; Кузнецов, 2002].

Другое объяснение укручения переднего склона связано с различием скоростей движения гребней и впадин волн на мелкой воде. Под гребнями полная глубина равна $H + a/2$, а под впадинами $H - a/2$. Под гребнями глубина больше и, следовательно, скорость волны выше, чем во впадинах [Лемб, 1947]. Со временем произойдет наполнение гребней на ложбины, в результате чего крутизна переднего склона возрастет. Данное объяснение выявляет исходный механизм возникновения нелинейности на мелководье, а описание физики процесса приведет к волновому варианту описания.

Следовательно, предложенный метод позволяет описать как процесс начального заострения гребней, так и последующее укручение переднего фронта. Возрастание скорости частиц на гребне приводит к дальнейшему укручению переднего фронта. Когда скорость частиц становится сравнимой с фазовой скоростью волны, она становится неустойчивой и начинает разрушаться.

На мелководье с пологим дном обрушение может происходить по типу ныряющего или скользящего буруна. Ныряющий бурун сопровождается выбросом струи из гребня с последующим захватом воздуха (рис. 3.4.8, см. цветную вклейку).

При скользящем буруне верхняя часть гребня стекает вниз в виде роллера (вальца), создавая значительную турбулентность. Если обрушение происходит вдали от берега, то поверхностная волна избавляется от ускоренных частиц среды на крутом переднем фронте гребня, а это приводит к уменьшению высоты волны. В дальнейшем она окончательно обрушится на берегу, как и все остальные поверхностные нелинейные волны с крутым передним фронтом. В рамках линейного приближения при малых значениях амплитуды диссипация волны может происходить без ее обрушения (рис. 2.6.3).

Обрушение волны на береговой линии приводит к явлению прибоа (рис. 3.4.9, см. цветную вклейку), когда потенциальная энергия волны переходит в приятный шум прибоа, возникают турбулентности с пеной, приводятся в движение прибрежные взвешенные массы.

3.5. Моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн

Рассмотрим волновые процессы, происходящие при подходе нелинейных гравитационных поверхностных волн к берегу в условиях мелководья. Смоделируем береговые склоны разной крутизны в условиях залива. Линии дна представлены на рис. 3.5.1 (масштаб по глубине увеличен). Они смоделированы на основе графиков функций синуса $s(x) = x \sin x$ и Бесселя пятого порядка $s(x) = xJ(5, x)$ в пределах от 0 до 10 км по оси x . Глубина уменьшается с $H = 5$ м до нуля, крутизна склона не превышает значения $0,01^\circ$. Линия дна на основе функции синуса является полой по всей протяженности дна, а на основе функции Бесселя — более крутой у берега.

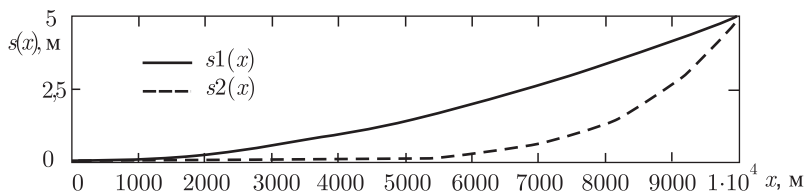


Рис. 3.5.1. Линии дна по аналитическим выражениям: $s_1(x) = 0,0006x \times \sin(0,0001x)$; $s_2(x) = 2x \times J(5, 0,0001x)$

При распространении поверхностной волны к берегу глубина постепенно уменьшается. Однако формула для скорости распространения поверхностной гравитационной волны (2.3.17)

$$c = \sqrt{gH}$$

выведена при условии постоянства глубины мелководья [Лэмб, 1947], т. е. для $H = \text{const}$. Но если в пределах одной длины волны глубина меняется лишь на ее долю, то формула (2.3.17) является вполне приемлемой для медленно меняющихся глубин [Габов, 1988; Шулейкин, 1968]. В нашем случае среднее изменение глубины для самой высокочастотной волны (удовлетворяющей условиям мелководности $H/\lambda \ll 1$) с длиной $\lambda = 30$ м составляет менее $0,01\lambda$.

При распространении гравитационной волны к берегу происходит постепенное уменьшение длины волны, заострение гребня и в дальнейшем она обрушивается (на берегу или до него). Уменьшение длины

волны следует из выражения (2.3.17) для волнового числа, тогда с учетом изменения глубины получим

$$k(x) = \sqrt{\frac{\omega^2}{g(H - s(x))}}, \quad \lambda(x) = \frac{2\pi}{k(x)}. \quad (3.5.1)$$

Зависимость волнового числа $k(x)$ и скорости $c(x)$ от глубины приводит к зависимости от расстояния (из-за уменьшения глубины) и других основных параметров поверхностной волны: длины волны $\lambda(x)$; амплитуды $a(x)$; нелинейного параметра $\varepsilon(x)$; дисперсии $\gamma(x)$.

Необходимо отметить, что уменьшение длины поверхностной волны при подходе к берегу приводит к искривлению фронта волны, а это в свою очередь приведет к рефракции. Однако при этом должен соблюдаться закон сохранения энергии. Для анализа основных параметров поверхностной гравитационной волны будем пользоваться выражением (2.3.23) для полной энергии поверхностной гравитационной волны:

$$E = \frac{\rho_0 g}{4} \lambda a^2.$$

Уменьшение длины волны обуславливает увеличение значения амплитуды смещения, так как для волнового процесса энергия постоянна (выражение (3.4.2)).

На рис. 3.5.2 представлена геометрия задачи распространения поверхностной гравитационной волны до берега в условиях залива. В пределах каждой длины волны объем залива делится на вертикальные столбы жидкости.

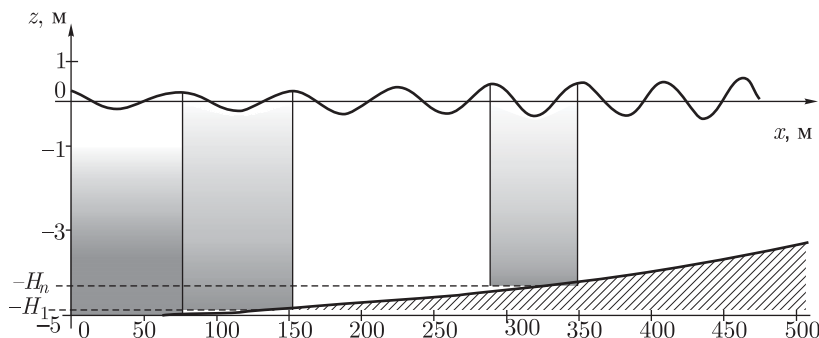


Рис. 3.5.2. Геометрия задачи распространения поверхностной гравитационной волны по наклонному дну в условиях залива

Снизу каждый столб ограничен плоскостью $z = -H_n$, а сверху свободной поверхностью. В направлении движения волны столб ограничен плоскостями $x = x_n$ и $x_{n+1} = x_n + \lambda$, которые отстоят друг от друга на длину волны. В пределах каждого столба жидкости соблюдается закон сохранения энергии.

Для того чтобы проследить трансформацию профиля нелинейной поверхностной гравитационной волны при распространении по заливу, воспользуемся выражением для горизонтальной скорости частиц среды (3.3.16), которое было получено методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} u_{\text{вт.}}(x, t) = & \varepsilon u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t) = \\ & = [\varepsilon^2 U_0 \exp(ikx) - ikt\varepsilon^3 U_0^2 \exp(2ikx)] + \\ & + [k^2 t^2 \varepsilon^5 U_0^3 \exp(ikx) + ikt\varepsilon^4 U_0^2 \exp(2ikx) + \\ & + 3k^2 t^2 \varepsilon^5 U_0^3 \exp(3ikx) - 2ik^3 t^3 \varepsilon^6 U_0^4 \exp(4ikx)] + (\text{к.с.}). \end{aligned}$$

Распределения колебательных скоростей первичных $u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t)$ и вторичных $u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t)$ волн при распространении гравитационной волны по заливу с рельефом дна, описываемым функцией Бесселя, представлены на рис. 3.5.3, а функцией синуса — на рис. 3.5.4.

Значения начальных параметров этой поверхностной волны аналогичны параметрам поверхностной волны, представленным на рис. 3.4.3: $\lambda = 77,8$ м; $2a/\lambda = 0,014$.

Так как в данном случае глубина залива уменьшается, следовательно, ускоряется процесс обрушения поверхностной волны из-за усиления нелинейности. Эта волна при распространении в заливе с ровным дном приходила в неустойчивость на расстоянии $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 10$ км. Она же для медленно поднимающегося в начале дна (на основе функции Бесселя) приходит в неустойчивость на расстоянии $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 7,3$ км, а корректной наша модель является до расстояния $x \approx 5$ км (рис. 3.5.3). Неустойчивость для равномерно поднимающегося дна (на основе функции синуса) наступает на расстоянии $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 5$ км, а корректной модель является до $x \approx 3,8$ км (рис. 3.5.4). При этом до расстояния $x \approx 7$ км глубина на основе функции Бесселя на порядок меньше глубины на основе функции синуса, поэтому поверхностная волна для такого дна оказывается более устойчивой. Уменьшение расстояния неустойчивости связано с увеличением значения амплитуды смещения (из-за уменьшения длины волны).

По сравнению с ровным дном амплитуда первичных волн $u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t)$ с расстоянием более медленно спадает. Это обусловлено тем, что при переходе к каждому новому столбику жидкости (рис. 3.5.2) значение амплитуды смещения растет. Для каждого нового столбика сначала определяется длина волны с помощью выражения (3.5.1), а потом с учетом постоянства энергии находим новые значения амплитуды смещения свободной поверхности, далее нелинейного параметра и колебательной скорости частиц. Значение нелинейного параметра $\varepsilon_n(x) = a_n(x)/H_n(x)$ при этом также увеличивается, так как с расстоянием глубина уменьшается.

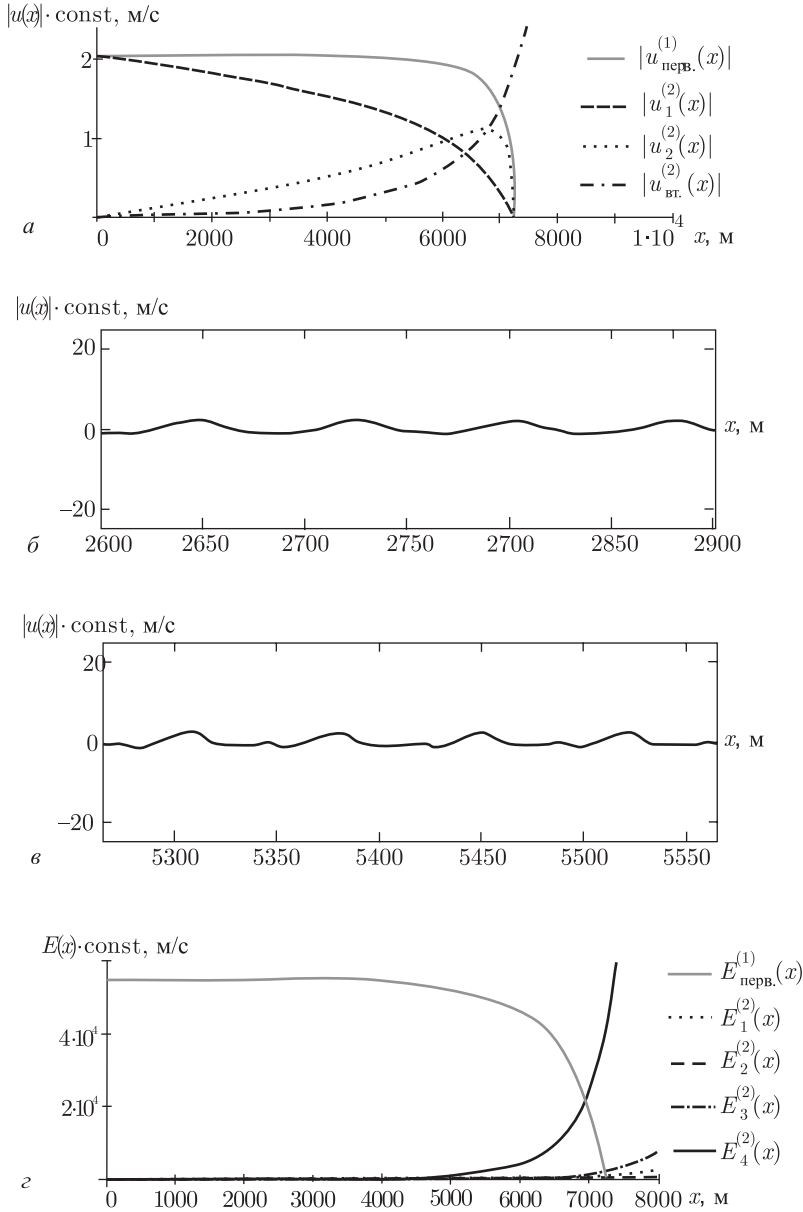


Рис. 3.5.3. Основные характеристики поверхностной гравитационной волны с начальными параметрами: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $c = 7$ м/с; $2a/\lambda = 0,014$; $kH = 0,4$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,004$, линия дна на основе функции Бесселя

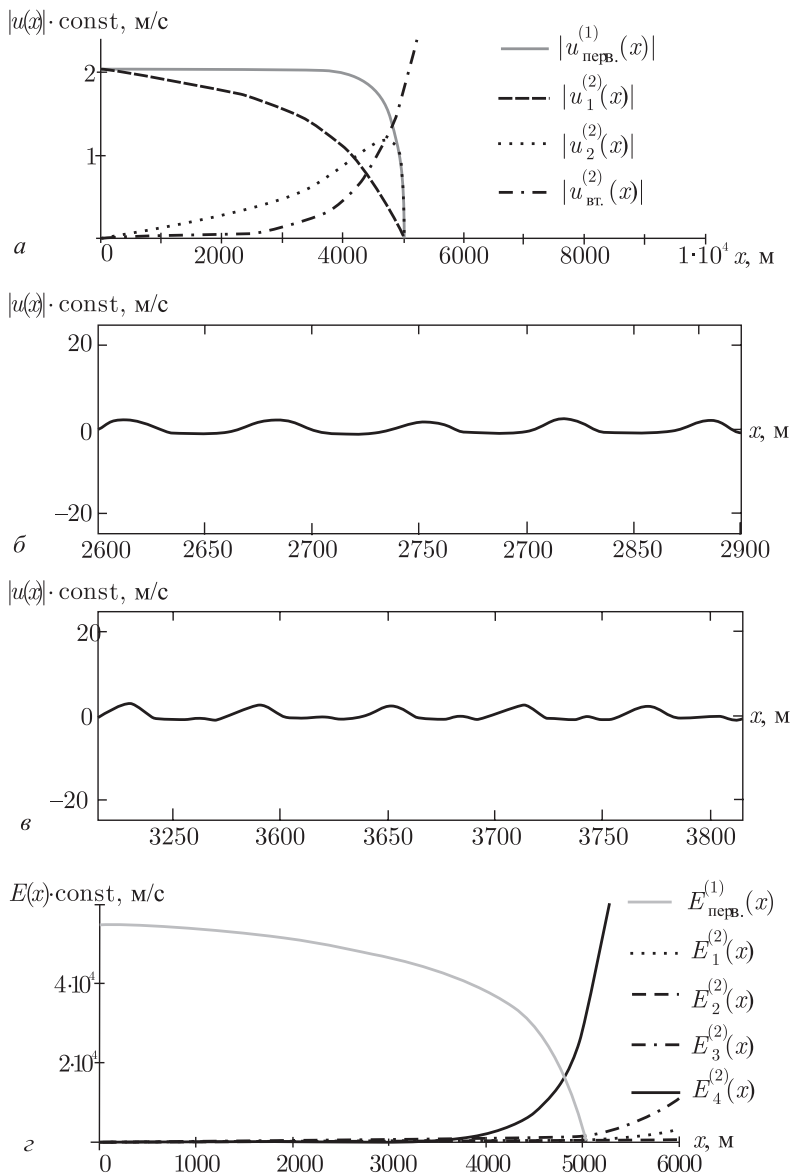


Рис. 3.5.4. Основные характеристики поверхностной гравитационной волны с начальными параметрами: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $c = 7$ м/с; $2a/\lambda = 0,014$; $kH = 0,4$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,004$, линия дна на основе функции синуса

Искажение профиля нелинейной поверхностной гравитационной волны (3.5.3б,в, и 3.5.4б,в) происходит более ускоренно и с большей амплитудой. При этом из сравнения рис. 3.5.3б и 3.5.3в (также рис. 3.5.4б и 3.5.4в) можно заметить постепенное уменьшение длины волны (сжатие волны), что само собой еще более усиливает крутизну волны.

Из рис. 3.5.3г и 3.5.4г видно также, что энергия первичных волн (без учета диссипации) к наступлению неустойчивости полностью переходит в энергию вторичных волн.

Для трехмерного моделирования рефракции нелинейной поверхностной гравитационной волны на береговых образованиях создадим трехмерную модель мыса, бухты и ровного берега.

На рис. 3.5.5 представлена модель трехмерного мыса с размерами 10 км×10 км×25 м (масштаб по оси z увеличен). Он описывается аналитическим выражением

$$z(x, y) = a\sqrt{xy} \sin(bxy). \quad (3.5.2)$$

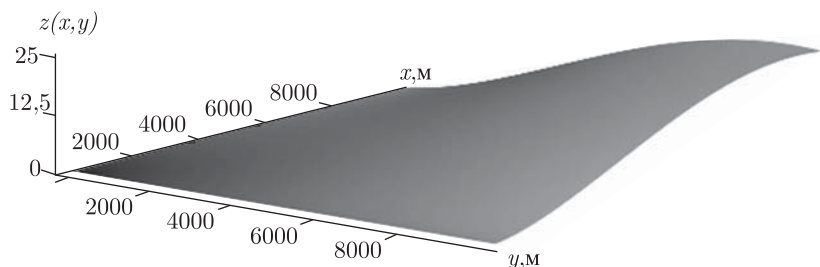


Рис. 3.5.5. Пространственная модель мыса (10 км×10 км×25 м) по аналитическому выражению $z(x, y) = 0,0024(xy)^{1/2} \times \sin(2 \times 10^{-8}xy)$

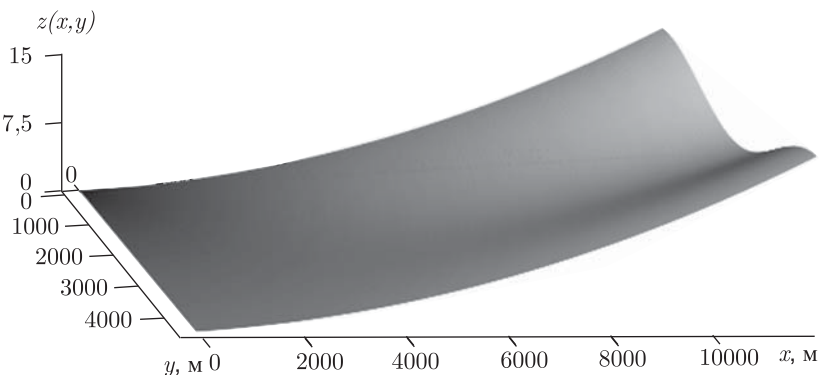


Рис. 3.5.6. Пространственная модель бухты (10 км×10 км×15 м) по аналитическому выражению $z(x, y) = 3 \times 10^{-8}y^2 \cos(0,0014x) + (3 \times 10^{-4}y)^2$

На рис. 3.5.6 представлена пространственная модель бухты по аналитическому выражению

$$z(x, y) = ay^2 \cos(bx) + (cy)^2. \quad (3.5.3)$$

Пространственная модель прямого берегового выступа описывается аналитическим выражением

$$z(x, y) = 0,0006y \times \sin(0,0001y). \quad (3.5.4)$$

Для моделирования процесса рефракции поверхностных гравитационных волн на данных береговых образованиях воспользуемся выражением для волнового числа в двухмерном случае (на основе выражения (3.5.1)):

$$k(x, y) = \sqrt{\frac{\omega^2}{g(H - z(x, y))}}, \quad (3.5.5)$$

где $z(x, y)$ — аналитическое выражение соответствующего берегового образования. Смоделированные береговые образования можно обнаружить в Таганрогском заливе в районе Беглицкой и Александровской косы.

На рис. 3.5.7 представлена трехмерная модель рефракции нелинейной поверхностной гравитационной волны на мысу в пределах от 0 до 4,5 км по осям x и y . Гравитационная волна имеет следующие начальные параметры: $f = 0,045$ Гц; $\lambda = 155,6$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,0076$; угол подхода составляет $\theta = 0^\circ$ относительно x .

Для расчетов поверхность залива разбита на сетку с шагом 8,5 м по осям x и y , значение шага на порядок меньше интервала дискретизации

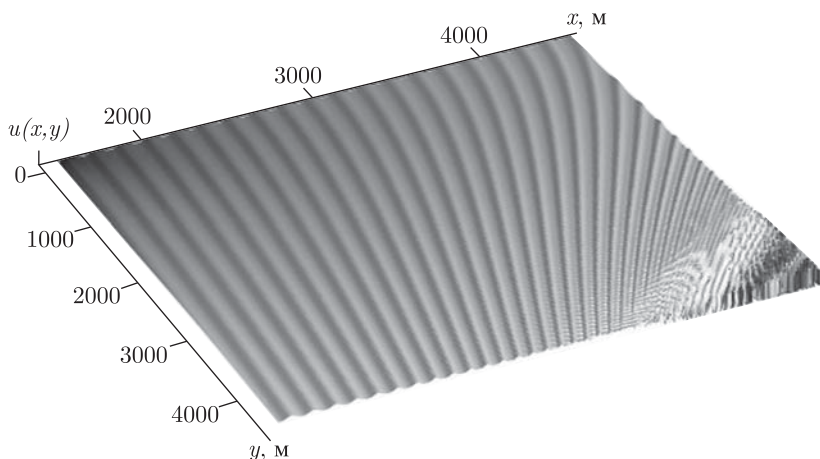


Рис. 3.5.7. Трехмерная модель рефракции на мысу нелинейной поверхностной гравитационной волны с начальными параметрами: $f = 0,045$ Гц; $\lambda = 155,6$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,0076$; $\theta = 0^\circ$

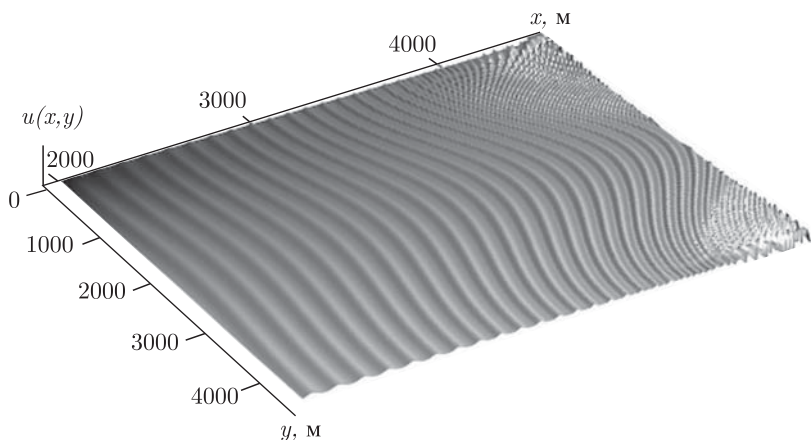


Рис. 3.5.8. Трехмерная модель рефракции в бухте нелинейной поверхностной гравитационной волны с начальными параметрами: $f = 0,045$ Гц; $\lambda = 155,6$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,0076$; $\theta = 0^\circ$

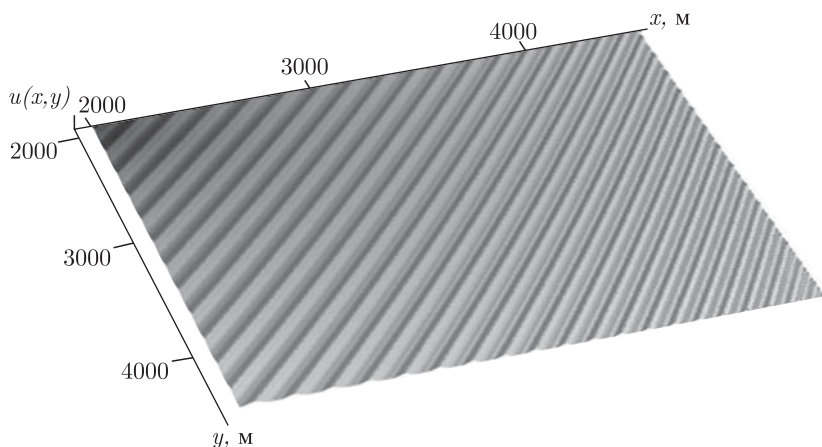


Рис. 3.5.9. Трехмерная модель рефракции на ровном берегу нелинейной поверхностной гравитационной волны с начальными параметрами: $f = 0,045$ Гц; $\lambda = 155,6$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,0076$; $\theta = 45^\circ$

соответствующей волны (не менее 10 точек на длину волны [Гоноровский, 1957]). Волновой вектор направлен вдоль оси x . Пространственно трехмерные модели созданы методом плоско параллельного переноса исходного поля скоростей вдоль оси y [Лаврентьев, 1973].

С приближением к мысу фронт нелинейной поверхностной волны начинает искривляться и стремится стать нормальным к береговой линии. По направлению оси x наряду с уменьшением длины волны наблюдается искажение профиля волны, который становится все круче.

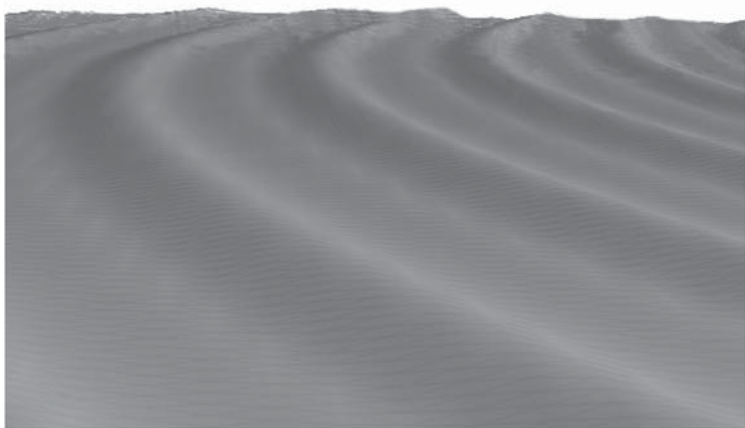


Рис. 3.5.10. Участок трехмерной модели рефракции на мысу нелинейной поверхностной гравитационной волны с углом подхода $\theta = 45^\circ$

На рис. 3.5.8 приведена трехмерная модель рефракции в бухте нелинейной поверхностной гравитационной волны: угол $\theta = 0^\circ$, протяженность залива по оси x составляет от 2 км до 4,5 км, по оси y составляет от 0 до 4,5 км.

На рис. 3.5.9 представлена трехмерная модель рефракции на ровном берегу нелинейной поверхностной гравитационной волны: угол подхода $\theta = 45^\circ$ относительно x , протяженность залива по оси x и оси y составляет участок с 2 км до 4,5 км.

На рис. 3.5.10 приведен увеличенный участок трехмерной модели рефракции на мысу нелинейной поверхностной гравитационной волны с углом подхода $\theta = 45^\circ$ относительно x .

3.6. Моделирование распространения и рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье с учетом дисперсии

Рассмотрим вопросы распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководных заливов с учетом дисперсии. На мелкой воде нелинейность ε и дисперсия γ определяются выражениями (3.2.1)

$$\varepsilon = \frac{v_x}{c} = \frac{a}{H}, \quad \gamma = \left(\frac{H}{\lambda}\right)^2,$$

где v_x — горизонтальная скорость частиц, c — скорость распространения гравитационных волн, a — амплитуда вертикального смещения свободной поверхности, H — глубина жидкости, λ — длина волны.

В отсутствии дисперсии в результате решения уравнения с квадратичной нелинейностью методом последовательных приближений было получено выражение (3.3.16). Пренебрежение дисперсией было связано с ее слабостью на мелкой воде. Однако даже слабая дисперсия на мелкой воде может препятствовать обрушению волны. При балансе слабой дисперсии со слабой нелинейностью возникают стационарные кноидальные волны (3.2.18).

Влияние дисперсии на процесс распространения мы учтем в первоначальном виде, через известный закон дисперсии для круговой частоты поверхностных гравитационных волн (выражение 2.3.8):

$$\omega = \sqrt{gk \cdot \operatorname{th} kH}.$$

Фазовая скорость гравитационных волн при этом определяется выражением (2.3.9):

$$c_\Phi = \frac{\omega}{k} = c_0 \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{th} kH}{kH}},$$

где $c_0 = \sqrt{gH}$ — скорость распространения поверхностных волн в приближении мелкой воды. Из выражения (2.3.9) следует, что скорость распространения для появляющихся вторичных волн с уменьшением длины волны будет уменьшаться.

Для нашего рассмотрения считаем, что соблюдается условие синхронизма для первичных взаимодействующих волн основной и второй гармоники, т. е. $\omega_2 = 2\omega$, и взаимодействующие волны распространяются с одинаковой скоростью c_0 (см. (3.3.10)):

$$u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t) = \varepsilon u^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x, t) = \\ = \varepsilon U_0 \exp[ikx] - ikt\varepsilon^2 U_0^2 \exp[i2kx] + \text{к.с.}$$

В результате взаимодействия основной и второй гармоники будут возникать вторичные волны, которые приведут к заострению гребня волны. При решении нелинейного уравнения (3.3.1) методом последовательных приближений, проводится возведение в квадрат и дифференцирование решения в первом приближении (выражение (3.3.10)):

$$u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t) = [(t\varepsilon^2 U_0^2/2) \cdot ik_2 \exp[ik_2 x] + (-k^2 t^3 \varepsilon^4 U_0^4) \cdot ik_4 \exp[ik_4 x] + \\ + (-ikt^2 \varepsilon^3 U_0^3) \cdot ik_3 \exp[ik_3 x] + \\ + (-ikt^2 \varepsilon^3 U_0^3) \cdot ik_1 \exp[ik_1 x]] + \text{к.с.} \quad (3.6.1)$$

Для учета дисперсии в данном выражении волновые числа вторичных волн обозначены соответствующими индексами:

$$k_n = \frac{\omega_n}{c_n}, \quad \omega_n = n\omega, \quad n = 1, 2, 3, 4 \text{ — номер гармоник,}$$

при этом каждая волна будет распространяться со своей скоростью:

$$c_n = c_0 \cdot \sqrt{\frac{\text{th}(nkH)}{(nkH)}}. \quad (3.6.2)$$

С учетом выражения (3.6.1) решение в двух приближениях для горизонтальной скорости частиц среды будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_{\text{вт.}}(x, t) = \varepsilon u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t) = [\varepsilon^2 U_0 \cdot \exp(ikx) - \\ - ikt\varepsilon^3 U_0^2 \cdot \exp(2ikx)] + [(-ikt^2\varepsilon^5 U_0^3) \cdot ik_1 \exp[ik_1 x] + \\ + (t\varepsilon^4 U_0^2/2) \cdot ik_2 \exp[ik_2 x] + (-ikt^2\varepsilon^5 U_0^3) \cdot ik_3 \exp[ik_3 x] + \\ + (-k^2 t^3 \varepsilon^6 U_0^4/2) \cdot ik_4 \exp[ik_4 x]] + \text{к.с.} \quad (3.6.3) \end{aligned}$$

Амплитудные составляющие скорости вторичных волн имеют разную степенную зависимость от времени (второе слагаемое выражения (3.6.3)):

$$u_n^{(2)}(x, t) = U_{n0}(t) \exp(ik_n x). \quad (3.6.4)$$

Фазовая часть скорости содержит волновое число, которое будет зависеть от скорости каждой гармоники на основе выражения (3.6.2). Следовательно, для высоких гармоник скорость распространения будет уменьшаться, что является следствием дисперсии. Поэтому вторичные волны, появляющиеся в результате нелинейных эффектов, из-за нарушения синхронизма могут не приводить к укрупнению гребня волны.

Амплитудные составляющие, благодаря временному члену и волновому числу, тоже зависят от скорости распространения гармоники. Так как амплитуда гармоники обратно пропорциональна скорости распространения, она будет расти со временем быстрее, чем в случае без дисперсии.

Необходимо отметить также, что в отличие от кноидальных волн, в нашем случае влияние дисперсии на профиль поверхностной волны можно наблюдать в динамике при распространении ее по мелководью.

Рассмотрим влияние дисперсии на нелинейные волновые процессы в условиях Таганрогского залива Азовского моря: средняя глубина не превышает 5 м, мелководности удовлетворяют гравитационные волны с длинами свыше 30 м, дно ровное, поверхностное натяжение отсутствует, влияние ветра не учитывается.

На рис. 3.6.1а представлены графики изменения от расстояния амплитуд скоростей первичных $u_{\text{перв.}}^{(1)}(x, t)$ и вторичных $u_{\text{вт.}}^{(2)}(x, t)$ волн, а также основной волны $u_1^{(1)}(x, t)$ и второй гармоники $u_2^{(1)}(x, t)$.

Для поверхностной волны со следующими начальными параметрами: длина $\lambda = 77,84$ м; начальная крутизна $2a/\lambda = 0,014$, неустойчивость наступает на расстоянии $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 6600$ м. Значения начальных параметров этой поверхностной волны аналогичны параметрам поверхностной волны, представленным на рис.3.4.3.

Для поверхностной волны с начальными значениями: $\lambda = 77,8$ м; $2a/\lambda = 0,014$ без учета дисперсии неустойчивость наступала на расстоянии $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 10$ км, с учетом дисперсии это расстояние уменьшается до $x_{\text{хар.}}^{(2)} \approx 6600$ м.

Уменьшение расстояния неустойчивости связано с быстрым ростом амплитуды вторичных волн из-за обратной зависимости их от скорости распространения. С учетом дисперсии скорость распространения вторичных волн на основе выражения (3.6.2) принимает следующие значения: $c_1 = 6,8$ м/с; $c_2 = 6,4$ м/с; $c_3 = 5,8$ м/с; $c_4 = 5,3$ м/с. Скорость распространения в рамках мелководной модели составляет при этом $c_0 = 7$ м/с, следовательно, изменение скорости для четвертой гармоники будет составлять $\Delta c_4 = 1,7$ м/с, т.е. будет на 25% меньше.

Анализируя рис. 3.6.1а, можно отметить, что с ростом суммарной амплитуды вторичных волн амплитуда первичных волн падает. Амплитуда второй гармоники медленно нарастает, и к моменту неустойчивости резко падает, так как происходит полная перекачка энергии от первичных волн (основная волна и вторая гармоника) к вторичным волнам.

Рассмотрим изменение профиля исходной гравитационной волны до расстояния $x \approx 4000$ м, где выполняется начальное условие применимости метода последовательных приближений $u^{(n+1)} \ll u^{(n)}$. До данного расстояния суммарная амплитуда вторичных волн гораздо меньше амплитуды первичных волн, следовательно, наше рассмотрение является еще корректным.

На рис. 3.6.1б и 3.6.1в представлены зависимости изменения горизонтальной скорости частиц среды $u(x, t)$ от расстояния пробега на основе выражения (3.6.3). Волна с изначально косинусоидальным профилем за время пробега постепенно начинает искажаться, гребни заостряются, а впадины становятся все более пологими (рис. 3.6.1б). Это является следствием нелинейных процессов, приводящих к появлению высших гармоник. Далее начинает проявляться влияние дисперсии на высшие гармоники. Для третьей и четвертой гармоник условие мелководности уже не соблюдается, и они начинают распространяться с меньшей скоростью, что приводит к нарушению синхронизма.

В результате, если нелинейность не доведет волну до обрушения (до отвесного переднего фронта гребня), то дисперсия приведет исходный цуг волны к распаду, как на рис. 3.6.1в. На рис. 3.6.1г представлены энергетические характеристики первичных и вторичных волн.

Далее рассмотрим влияние дисперсии на распространение поверхностных гравитационных волн по мелководью с разными волновыми параметрами. На рис. 3.6.2, 3.6.3 и 3.6.4 представлены профили поверхностных гравитационных волн в зависимости от расстояния пробега для трех разных волн.

Для сравнения на рис. 3.6.2а, 3.6.3а и 3.6.4а приведены профили поверхностных волн без учета дисперсии (на основе выражения

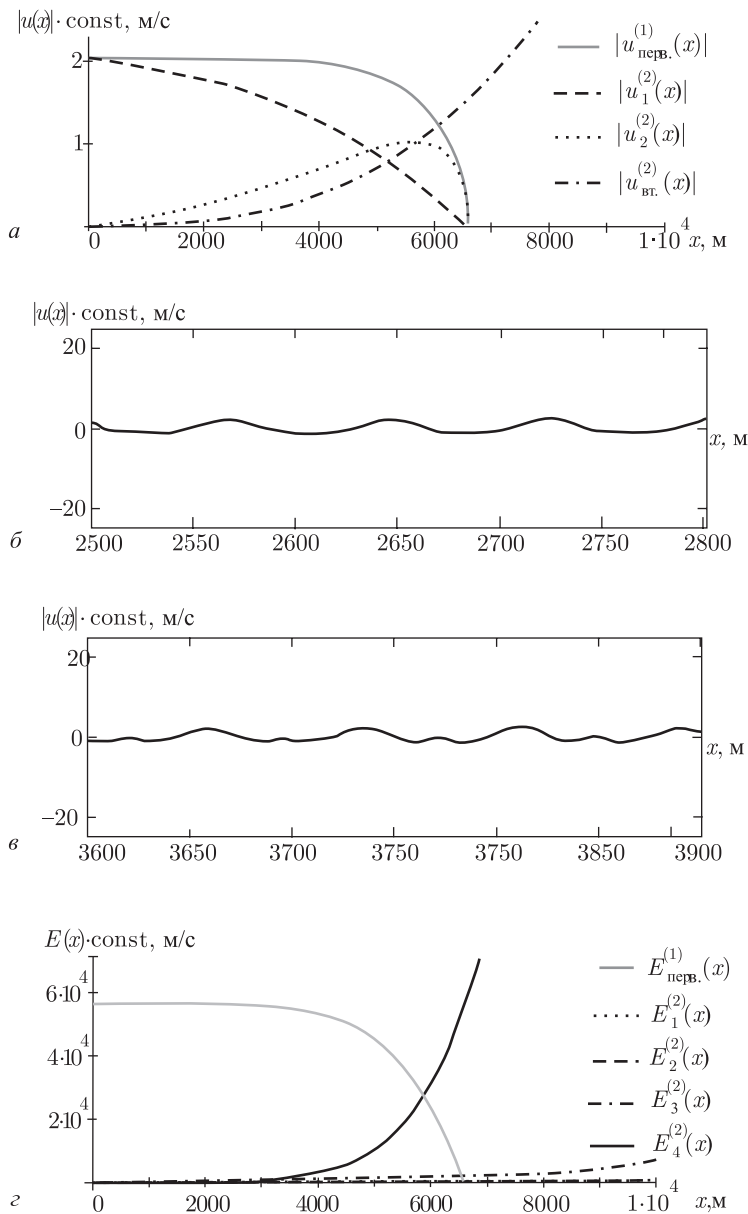


Рис. 3.6.1. Основные характеристики поверхностной гравитационной волны с учетом дисперсии: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $2a/\lambda = 0,014$; $kH = 0,4$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,004$

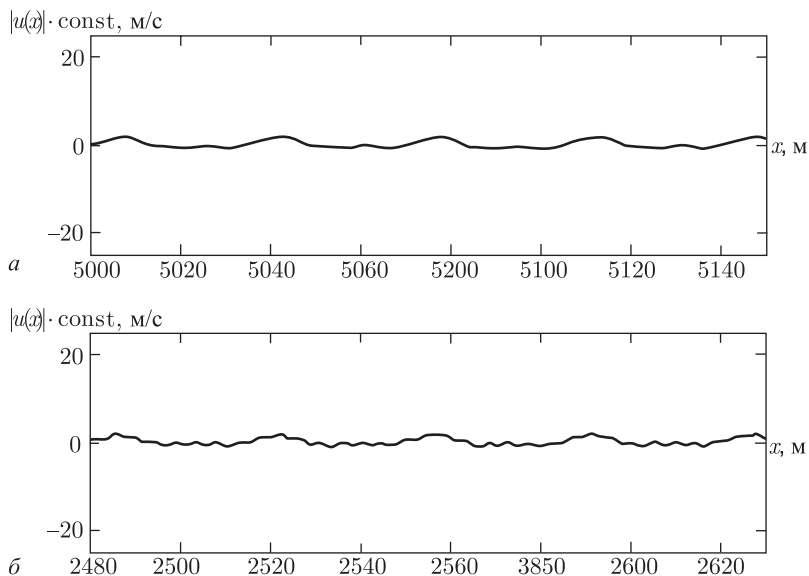


Рис. 3.6.2. Профили поверхностной гравитационной волны без учета (а) и с учетом (б) дисперсии $f = 0,2$ Гц; $\lambda = 35$ м; $2a/\lambda = 0,024$; $kH = 0,9$; $\varepsilon = 0,08$; $\gamma = 0,02$

(3.3.16)), а на рис. 3.6.2б, 3.6.3б и 3.6.4б с учетом дисперсии (на основе выражения (3.6.3)). Значения расстояний пробега выбраны по принципу равных энергетических уровней вторичных волн.

Для поверхностной волны с $\lambda = 35$ м (рис. 3.6.2) скорость распространения вторичных волн принимает следующие значения: $c_1 = 6,3$ м/с; $c_2 = 5,1$ м/с; $c_3 = 4,3$ м/с; $c_4 = 3,7$ м/с. Разность скорости распространения для четвертой гармоники будет составлять $\Delta c_4 = 3,3$ м/с, т. е. она на 47% меньше.

Для поверхностной волны с $\lambda = 155,6$ м (рис. 3.6.4) скорость распространения вторичных волн принимает следующие значения: $c_1 = 6,9$ м/с; $c_2 = 6,2$ м/с; $c_3 = 6,6$ м/с; $c_4 = 6,4$ м/с. Разность скорости распространения для четвертой гармоники будет составлять $\Delta c_4 = 0,6$ м/с, т. е. она всего на 8% меньше.

С учетом обратной зависимости дисперсии от длины поверхностной волны (выражение (3.2.1)) ее влияние сильнее проявляется для короткой волны $\lambda = 35$ м, нелинейность и дисперсия при этом имеют одинаковый порядок — $\varepsilon = 0,08$; $\gamma = 0,02$. Для этой волны поверх основной пробегает высокочастотная четвертая гармоника (рис. 3.6.2б).

Для поверхностной волны $\lambda = 155,6$ м дисперсия проявляется в меньшей степени (рис. 3.6.4) и превалирует нелинейность, она на два порядка выше, чем дисперсия: $\varepsilon = 0,136$; $\gamma = 0,001$.

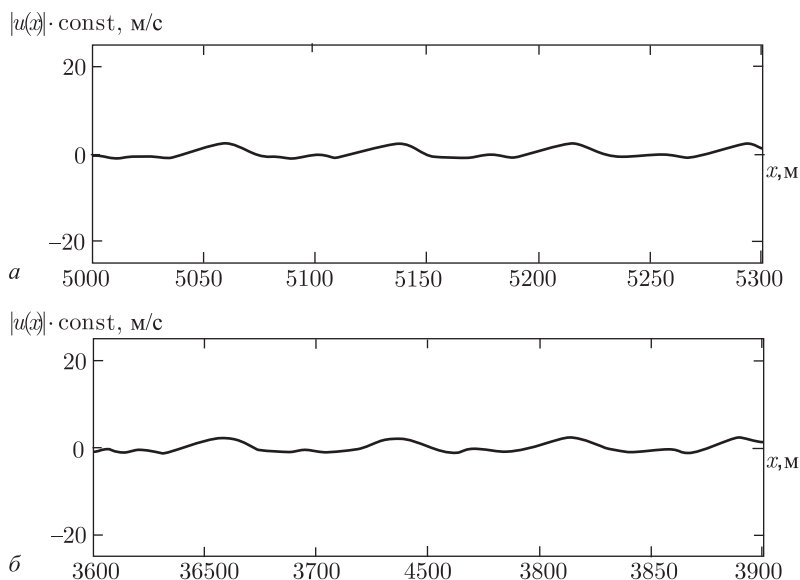


Рис. 3.6.3. Профили поверхностной гравитационной волны без учета (а) и с учетом (б) дисперсии: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $2a/\lambda = 0,014$; $kH = 0,4$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,004$

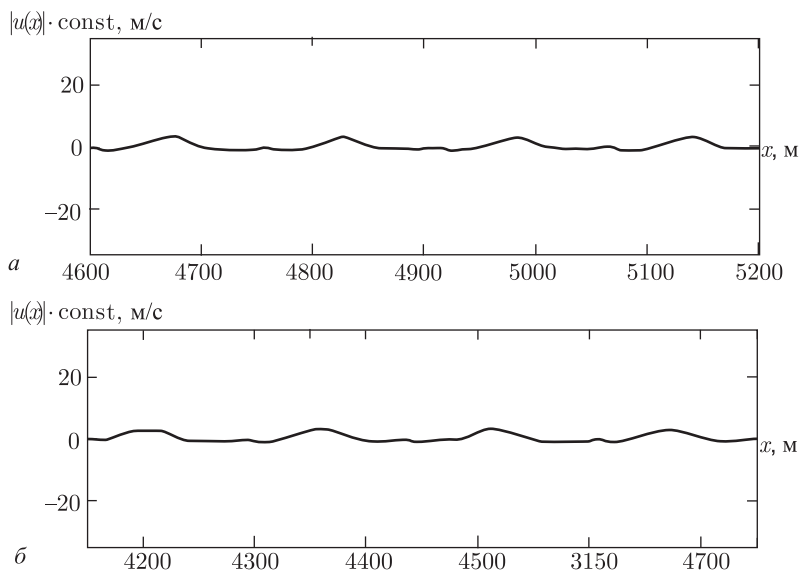


Рис. 3.6.4. Профили поверхностной гравитационной волны без учета (а) и с учетом (б) дисперсии: $f = 0,045$ Гц; $\lambda = 155,6$ м; $2a/\lambda = 0,0088$; $kH = 0,2$; $\varepsilon = 0,136$; $\gamma = 0,001$

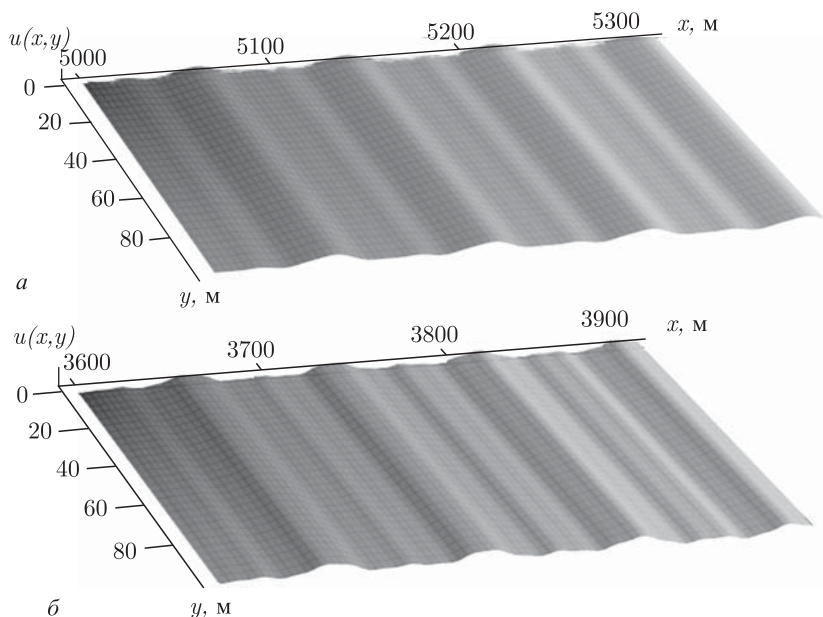


Рис. 3.6.5. Пространственная модель распространения поверхностной гравитационной волны с параметрами $f = 0,009$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,014$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,004$

Явление дисперсии приводит к нарушению синхронизма между вторичными волнами, и профиль волны перестает быть периодическим. Чем лучше будет выполняться условие мелководности, тем менее ощутима будет дисперсия. Дисперсия также может компенсировать укручение гребня волны на начальном этапе распространения, тем самым откладывая ее обрушение по заливу.

Для наглядности на рис. 3.6.5 представлена трехмерная модель распространения поверхностной волны по заливу без учета и с учетом дисперсии. Параметры волн аналогичны представленным на рис. 3.6.3. На рис. 3.6.5а профиль волны искажается из-за нелинейности, на рис. 3.6.5б представлен профиль волны с учетом нелинейности и дисперсии. Здесь можно наблюдать расползание цуга волны в результате дисперсии.

При подходе к берегу фронт поверхностной гравитационной волны будет претерпевать рефракционные изменения. Для сравнительного анализа на рис. 3.6.6 представлены профили поверхностной гравитационной волны без учета (рис. 3.6.6а) и с учетом дисперсии (рис. 3.6.6б). Линия дна задана на основе функции синуса (рис. 3.5.1).

Расстояние неустойчивости для поверхностной волны с начальными параметрами $\lambda = 77,8$ м, $2a/\lambda = 0,014$ без учета дисперсии составляет $x_{\text{хар}}^{(2)} \approx 5000$ м, а с учетом дисперсии уменьшается до $x_{\text{хар}}^{(2)} \approx 4300$ м.

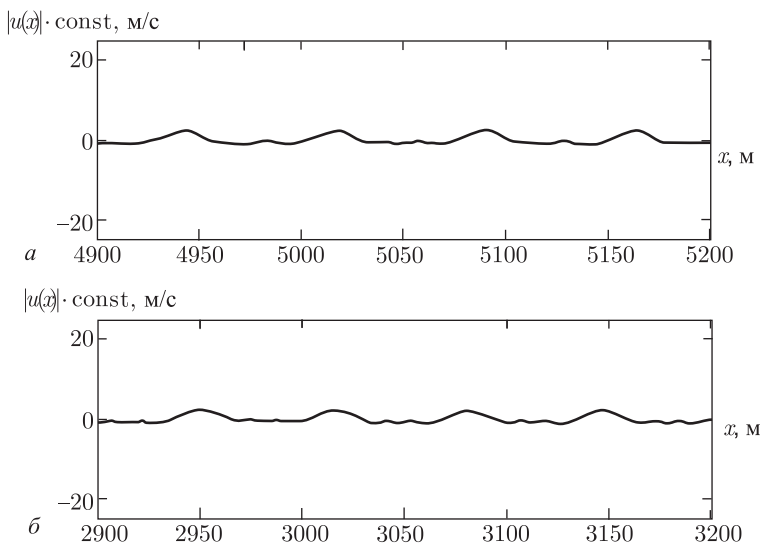


Рис. 3.6.6. Рефракционные профили поверхностной гравитационной волны без учета и с учетом дисперсии, начальные параметры: $f = 0,09$ Гц; $\lambda = 77,8$ м; $kH = 0,4$; $2a/\lambda = 0,014$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,004$

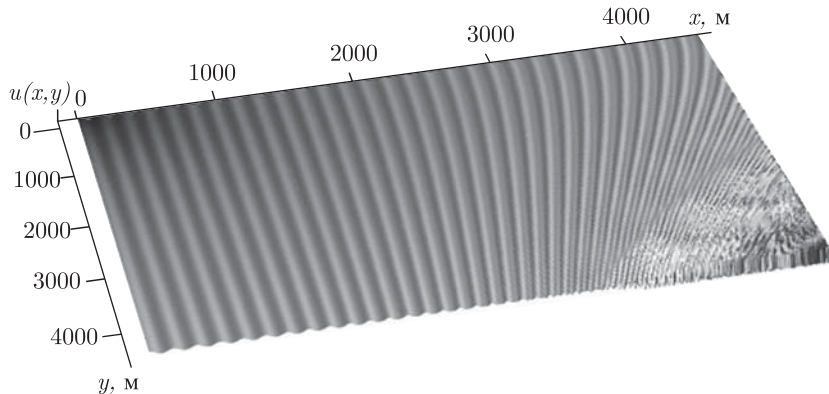


Рис. 3.6.7. Трехмерная модель рефракции на мысу нелинейной поверхностной гравитационной волны с учетом дисперсии, начальные параметры $f = 0,045$ Гц; $\lambda = 155,6$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,014$; $\varepsilon = 0,107$; $\gamma = 0,076$; $\theta = 0^\circ$

На рис. 3.6.7 представлена трехмерная модель рефракции нелинейной поверхностной гравитационной волны на мысу с учетом дисперсии. Протяженность залива составляет от 0 до 4,5 км по осям x и y . Гравитационная волна имеет следующие начальные параметры: $f = 0,045$ Гц; $\lambda = 155,6$ м; $H = 5$ м; $2a/\lambda = 0,0076$; угол подхода составляет $\theta = 0^\circ$ относительно оси x . С приближением к мысу длина нели-

нейной поверхностной волны уменьшается, фронт волны искривляется. Из-за слабой дисперсии для данной волны волновой цуг распадается ближе к мысу.

3.7. Выводы

В третьей главе были проведены исследование и моделирование нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья. Сделан обзор исследований по нелинейным поверхностным гравитационным волнам.

Представлены системы уравнений, описывающие нелинейные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. Рассмотрены уравнения мелкой воды, а также уравнения Буссинеска и Кортевега–де Вриза, учитывающие эффекты дисперсии при распространении нелинейных поверхностных волн по мелководью.

Методом последовательных приближений получены решения уравнения с учетом квадратичной нелинейности. Решение для горизонтальной скорости частиц в первом приближении состоит из основной гармоник и линейно растущей второй гармоник. Решение во втором приближении содержит вторичные волны удвоенных частот и комбинационные волны. Появление второй, третьей и четвертой гармоник в спектре исходной волны со временем приводит к искажению профиля.

На основе закона сохранения энергии найдены зависимости для горизонтальной скорости частиц среды волн первичного и вторичного полей. Представлены графики изменения энергии основной волны и высших гармоник от расстояния пробега. Для определения расстояния наступления неустойчивости использован графоаналитический способ.

Представлены профили нелинейных поверхностных волн для различных расстояний пробега. Волна с изначально косинусоидальным профилем постепенно искажается, гребни заостряются, а впадины становятся все более пологими. Эти искажения связаны с влиянием высших гармоник. Описано укрупнение переднего склона гребня волны появлением сдвига фаз между основной волной и высшими гармониками. Приведены пространственно-трехмерные модели распространения по заливу поверхностной гравитационной волны.

Описаны типы асимметрий профилей поверхностных волн. Появление высокочастотных гармоник основной волны приводит к заострению гребней и пологости впадин. При этом сами гребни остаются симметричными относительно вертикальной оси. Второй тип асимметрии связан с укрупнением переднего склона трансформирующейся волны. В рамках предложенного графоаналитического метода было установлено, что этот тип асимметрии связан с фазовым сдвигом высших гармоник относительно основной волны. Были представлены натурные иллюстрации явлений заострения гребней поверхностных волн, образования ныряющего буруна, а также их обрушения на береговой линии.

Рассмотрены волновые процессы, происходящие при подходе нелинейных гравитационных поверхностных волн к берегу в условиях мелководья. Смоделированы береговые склоны разной крутизны в условиях залива. При подходе к берегу происходит постепенное уменьшение длины волны, что приводит к рефракции. Для трехмерного моделирования рефракции нелинейной поверхностной гравитационной волны на береговых образованиях созданы трехмерные модели мыса, бухты и ровного берега. Приведены пространственно-трехмерные модели рефракции нелинейной поверхностной гравитационной волны на береговых образованиях.

Для адекватного рассмотрения распространения нелинейных поверхностных волн в условиях мелководья необходимо учитывать одновременно и нелинейность и дисперсию. По полученным аналитическим выражениям для горизонтальной скорости частиц среды описана эволюция профиля нелинейных поверхностных гравитационных волн. Представлены профили поверхностных гравитационных волн при распространении по заливу с учетом дисперсии.

Дисперсия приводит к нарушению синхронизма между вторичными волнами, и профиль волны перестает быть периодическим. Она может компенсировать укручение фронта волны и на начальном этапе распространения, тем самым откладывая ее обрушение по заливу. Представлены пространственно-трехмерные модели распространения поверхностной волны по заливу без учета и с учетом дисперсии. На них наблюдается расползание исходного цуга волны в результате дисперсии. Приведена также пространственно-трехмерная модель рефракции нелинейной поверхностной гравитационной волны на мысу с учетом дисперсии.

Результаты исследований, проведенных в данной главе, были опубликованы в следующих основных работах:

- в работах [Аббасов, 2001 УГУ; 2003 ИСК; 2003 ФАО] методом последовательных приближений были получены решения уравнения с учетом квадратичной нелинейности, приведены профили нелинейных поверхностных волн и пространственно-трехмерные модели распространения по заливу;

- в работах [Аббасов, 2001 НЧК; 2003 ФАО; 2003 УСЕ] рассмотрены волновые процессы при подходе нелинейной поверхностной волны к берегу, приведено трехмерное моделирование береговых образований и процесса рефракции нелинейных поверхностных волн на них;

- в работах [Аббасов, 2004 НСБ; 2004 NN; 2007 АБР] представлены результаты трехмерного моделирования рефракции нелинейных поверхностных волн в бухте и на мысу;

- в работе [Аббасов, 2008 АБР] приведена трансформация профиля поверхностных волн при распространении по мелководью с учетом дисперсионных эффектов.

Заключение

В первой главе были представлены особенности задач математической физики, классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка для описания этих задач, приведены нелинейные уравнения гидродинамики и методы их решения, рассмотрены особенности применения метода последовательных приближений.

Во второй главе были проведены исследование и моделирование волновых явлений на поверхности мелководья. Представлены уравнения для описания поверхностных гравитационных волн, основные параметры волн в приближениях мелкой и глубокой воды. Приведены графики зависимостей основных характеристик поверхностной гравитационной волны от глубины и от волнового числа на мелководье.

Представлены пространственно-трехмерные модели распространения группы поверхностных волн на мелководье в линейном случае. Были созданы трехмерные модели береговых образований в виде мыса, бухты и ровной береговой линии. Приведены пространственно-трехмерные модели рефракции группы поверхностных гравитационных волн на различных береговых образованиях для линейного случая.

Были рассмотрены волны на поверхности жидкости, возникающие при движении твердого тела по ее поверхности. Описаны основные параметры волнового хвоста за движущимся объектом. Представлены натурные иллюстрации волновых явлений на поверхности мелководья: наложения волн ряби и зыби, рефракция волн в условиях бухты, распространения корабельных волн.

В третьей главе были проведены исследование и моделирование нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья. Для описания нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье были рассмотрены уравнения мелкой воды, Буссинеска, Кортвега-де Вриза. Методом последовательных приближений были получены решения в двух приближениях уравнения с учетом квадратичной нелинейности. Предложенным графоаналитическим методом были найдены зависимости для горизонтальной скорости частиц среды первичных и вторичных волн.

Представлены профили нелинейных поверхностных волн для различных расстояний пробега и графики изменения энергетических характеристик. Были созданы трехмерные модели береговых образований и представлены пространственно-трехмерные модели распространения и рефракции на них нелинейных поверхностных гравитационных волн.

Рассмотрены причины возникновения асимметрий профилей поверхностных волн. Появление высокочастотных гармоник основной волны приводит к заострению гребней и пологости впадин. В рамках предложенного графоаналитического метода было установлено, что укручение переднего фронта волны связано с фазовым сдвигом высших гармоник относительно основной волны. Были представлены натурные

иллюстрации явлений заострения гребней поверхностных волн, образования ныряющего буруна, а также их обрушения на береговой линии.

На основе полученных аналитических выражений были учтены влияния эффектов дисперсии на трансформацию профиля нелинейных поверхностных гравитационных волн. Представлены пространственно-трехмерные модели распространения и рефракции нелинейной поверхностной волны по заливу с учетом дисперсии.

Литература

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М., 1979. 832 с.
2. *Алешков Ю.З.* Трансформация поверхностных волн в жидкости при медленно изменяющейся глубине. // Сб. "Актуальные проблемы механики сплошных сред", ЛГУ, №13, 1980. С. 34-38.
3. *Алешков Ю.З.* Нелинейная теория трансформации и рефракции поверхностных волн. // Вопросы механики и процессов управления. Вып.12. ЛГУ, 1989.
4. *Алешков Ю.З.* Математическое моделирование физических процессов. — Изд-во СПбГУ. СПб., 2001, 264 с.
5. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994. 544 с.
6. *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1969. 288 с.
7. *Архипов Д.Г., Хабахнашев Г.А.* Новый подход к описанию пространственных нелинейных волн в диспергирующих средах // Доклады Академии наук. 2006. Т.409, №4. С. 476-480.
8. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. — М.: Наука, 1982. 335 с.
9. *Виленкин Н.Я.* Метод последовательных приближений. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1968. 108 с.
10. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литер. 1979. 384 с.
11. *Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Приближенные методы математической физики. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана. 2001, 700 с.
12. *Вольцингер Н.Е., Пяковский Р.В.* Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. —Л.: Гидрометеониздат. 1977, 207 с.
13. *Габов С.А.* О свойстве разрушения уединенных волн, описываемых уравнением Уизема // ДАН СССР. 1979. Т.246, №6. С. 1292-1295.
14. *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. — М.: Изд-во МГУ, 1988. 176 с.
15. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. В 2-х т. Т. 1. — М. Мир. 1986. 396 с. Т.2. 415 с.
16. *Гоноровский И.С.* Основы радиотехники. — М., 1957. 727 с.
17. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1983. 176 с.
18. *Диденкулова И. И., Заibo Н., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н.* Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. т. 42, № 6. С. 839-842.

19. Диденкулова И. И., Пелиновский Е. Н. Накат длинных волн на берег: влияние формы подходящей волны // *Океанология*. 2008. Т. 48, №1. С. 5-10.
20. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // *Прикладная механика и теоретическая физика*. 1968. № 2. С. 86–94.
21. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерная автомодуляция волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ*. 1971. Т. 74, С. 118-134.
22. Зейтунян Р.Х. Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны // *Успехи физических наук*. 1995. Т. 165. № 12. С. 1403-1456.
23. Инфельд Э., Роуландс Дж. Нелинейные волны, солитоны и хаос. — М.: Физматлит, 2006. 480 с.
24. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. О стабильности солитонов в средах со слабой дисперсией // *Доклады Академии наук*. 1970. Т. 192. С. 753-756.
25. Калмыков В.А. Численное моделирование обрушивающихся волн // *Матем. моделирование*. 1996. Т. 8, №8. С. 37-41.
26. Коган В.Р., Кузнецов В.В. Применение теории аналитических функций в численном моделировании нестационарных поверхностных волн // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1995. Т. 36. №10. С. 1448-1456.
27. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М., 1968. 720 с.
28. Красицкий В.П. К теории трансформации спектра при рефракции ветровых волн // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1974. Т. 10, №1. С. 72-82.
29. Крукиер Л.А. Математическое моделирование гидродинамики Азовского моря при реализации проектов реконструкции его экосистемы // *Математическое моделирование*, 1991. Т. 3, №9, С. 3-20.
30. Крылов Ю.М. К теории рефракции морских волн // *Труды ГОИН*. 1950. вып. 16. С. 95.
31. Кудряшов Н. А. Нелинейные волны и солитоны // *Соросовский образовательный журнал*. 1997. №2. С. 85-91.
32. Кудряшов Н. А., Сыцько Ю. И., Чесноков С. А. Математическое моделирование гравитационных волн в океане в приближении «мелкой воды» // *Письма в ЖЭТФ*. 2003. 77, 10. с 649.
33. Кузнецов С.Ю. Волнение, турбулентность и процессы переноса взвешенных наносов в береговой зоне моря. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Институт океанологии им. Ширшова. 2005. 309 с.
34. Кузнецов С.Ю., Сапрыкина Я.В. Экспериментальные исследования эволюции групп волн в береговой зоне моря // *Океанология*. 2002. т. 42, № 3, С. 56-363.

35. Кузнецов С.Ю., Сапрыкина Я.В., Чернева Ж., Андреева Н. Пространственно-временная изменчивость амплитудно-фазовой структуры штормовых волн в береговой зоне моря // *Океанология*. 2009.
36. Куликовский А.Г., Реутов В.А. Распространение нелинейных волн над полубесконечными подводными впадинами и хребтами // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1980. №2. С. 53-61.
37. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. 416 с.
38. Ландсберг Г. С. Элементарный учебник физики. — М.: Наука, 1964. Т. 3. 572 с.
39. Лемб Г. Гидродинамика. — М., Гостехиздат, 1947. 524 с.
40. Леонтьев И.О. Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. — М.: ГЕОС, 2001. 272 с.
41. Литвиненко А.А., Хабахнашев Г.А. Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // *Вычислительные технологии*. 1999. Т.4, №3, С. 95-105.
42. Мамыкина В.А., Хрусталеv Ю.П. Береговая зона Азовского моря. Ростов н/Д., 1980. 176 с.
43. Монин А.С., В.П. Красицкий. Явления на поверхности океана. — Л.: Гидрометеoиздат, 1985. 375 с.
44. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. т.II. — М. Изд-во ин. лит, 1960. 896 с.
45. Муратова Г.А., Крукиер Л.А., Никитенко О.Б., Чикин А.Л., Шабас И.Н. Моделирование гидрофизических процессов в водоеме. В кн. «Комплексный мониторинг среды и биоты Азовского бассейна», 2004. Апатиты, том VI, стр. 279-198.
46. Наумкин П.Н., Шишмарев И.А. О существовании и разрушении волн, описываемых уравнением Уизема // *ДАН СССР*. 1986. Т. 288. №1. С. 90-95.
47. Некрасов А.И. О волнах установившегося вида // *Известия Иваново-Вознесенского политехнического института*. 1921. 3. С. 52–65. (Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости.—Физматгиз. Собр. соч. 1961. т.I. С. 358-439).
48. Нелинейные волны/ Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977. 319с.
49. Островский Л.А., Пелиновский Е.Н. Трансформация волн на поверхности жидкости переменной глубины. // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1970. Т. 6, №9. С. 934-939.
50. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — М.: Наука. 1981. 800 с.
51. Румянцев Б.Н. О неустановившихся движениях тяжелой жидкости у наклонного берега // *ПММ*. 1960. Т.24. №3. С. 554-557.

52. *Секерж-Зенькович Я.И.* К трехмерной задаче о стоячих волнах конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости // ДАН СССР. 1952. Т.86, №1. С. 35-38.
53. *Селезов И.Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. — Киев: Наук. думка, 1989. 204 с.
54. *Селезов И.Т., Сидорчук В.Н., Яковлев В.В.* Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. — Киев: Наук. думка, 1982. 208 с.
55. *Селезов И.Т., Ткалич П.В.* Нелинейно-рефракционная модель распространения поверхностных волн в жидкости // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. II Всесоюзная конф.—Киев, 1985. С. 187-189.
56. *Сретенский Л.Н.* Периодические волны, создаваемые источником, находящимся над наклонным дном. // ДАН СССР. 1963. Т. 151, №5. С. 1050-1052.
57. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. — М.:Наука, 1977. 816 с.
58. *Сухинов А.И.* Аддитивные схемы для моделирования трехмерных уравнений теплопроводности в цилиндрических и сферических координатах // Дифференциальные уравнения. 1987. Т.23, №12. С. 2122-2132.
59. *Сухинов А.И.* Комплексные океанологические исследования Азовского моря в 28-м рейсе научно-исследовательского судна «Аква-навт» // Океанология, 2003. Т.43, №1. С. 44-53.
60. *Сухинов А.И.* Прецизионные математические модели мелких водоемов // Математическое моделирование. 2003. №10. С. 17-34.
61. *Сухинов А.И.* Расчет коэффициента вертикального турбулентного обмена для моделей мелководных водоемов // Математическое моделирование и информационные технологии. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). Новочеркасск. Ред. журн. «Изв. вузов. Электромеханика», 2007, С. 72-76.
62. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. 724 с.
63. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.:Мир, 1976. 622 с.
64. *Чикин А.Л.* Трехмерная задача расчета гидродинамики Азовского моря // Математическое моделирование, 2001. Т.13, №2, С. 86-92.
65. *Шерменева М.А., Шуган И.В.* Расчет наката волн на пологий откос // Письма в ЖТФ. 2006. Т.32, № 2. С. 33-38.
66. *Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук Ан.Г., Симонов К.В.* Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 168 с.
67. *Шулейкин В.В.* Разрушение волн под действием мелководья // Изв. АН СССР. 1954. №1. С. 65.
68. *Шулейкин В.В.* Рефракция волн на материковой отмели // Изв. АН СССР. ОМОН. 1935. №10. С. 1355.

-
69. *Шулейкин В.В.* Физика моря. — М.:Наука, 1968. 1061 с.
 70. *Шун Терри Е.* Прикладные численные методы в физике и технике. — М.: Высшая Школа, 1990. 254 с.
 71. *Юэн Г., Лэйк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на воде. — М.: Мир, 1987. 179 с.
 72. *Airy G.B.* Tides and Waves // Encyclopedia Metropolitana. 1845. London. V.5. P. 241-396.
 73. *Benjamin T.B., Feir J.E.* The disintegration of wave trains on deep water // J. Fluid Mech. 27. 1967. P. 417.
 74. *Boosinesq J.* Theorie de l'intumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. C. R. Acad. Sci., Paris. 1871. 72. P. 755-759.
 75. *Bretherton F. P.* Resonant interactions between waves. The case of discrete oscillations // J.Fluid Mech., 1964, V. 20, P. 457-479.
 76. *Caponi E. A., Saffman P. G., Yuen H. C.* Instability and confined chaos in a nonlinear dispersion wave system // Phys. Fluids, 1982. V. 25, №.12, P. 2159—2166.
 77. *Cauchy A.* Theorie de la propagation des ondes a la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indefinie. Oeuvres Completes d'Augustin Cauchy. I serie. 1815. p. 5-318.
 78. *Cokelet E. D.* Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A., 1977, V. 286, P. 183-230.
 79. *Debol'skaya E. I., Yakushev E.V., Sukhinov A.I.* Formation of Fish Kills and Anaerobic Conditions in the Sea of Azov // Water resources. 2005. V.32, №.2. P. 151-162.
 80. *Dubreil-Jacotin M.L.* Sur les theoremes d'existence relatives aux ondes permanents periodiques a deux dimensions dans les liquids heterogenes. // J. Math. Pures Appl. 1937. 16. 9. P. 43-67.
 81. *Euler L.* Principes generaux du mouvement des fluides. Mem. Acad. Berlin.1955. 11. P.274-315. («Opera Omnia», 1755. Ser. Secunda.Vol. XII. P. 54-91).
 82. *Flick R.E., Guza R.T., Inman D.L.* Elevation and velocity measurements of laboratory shoaling waves // J. Geophys. Res. 1981. V. 86. № C5. P. 4149-4160.
 83. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V.19. P. 1095-1097.
 84. *Gerstner.* Theorie der Wellen. Abh. d.k. bohm. Ges. d. Wiss. 1802. (Gilbert's Annalen der Physik, XXXII. 1809).
 85. *Gimenez G., Chamant M., Farnand J.P.* Non-linear response of a single bubble driven by a two-components exciting wave // Proc. 10-th Int. Symp. on nonlinear Acoustics, Kobe, Japan. 1984. P. 83-87.

86. *Goda Y., Morinobu K.* Breaking wave heights on horizontal bed affected by approach slope // *Coastal Engineering Journal*. 1998. V.40, № 4. P. 307-326.
87. *Guyer R.A., Johnson P.A.* Nonlinear mesoscopic elasticity evidence for a new class of materials // *Physics Today*. 1999. V.52, №4. P. 30-36.
88. *Haslett R.* Determination of the acoustic scatter patterns and cross sections of fish models and ellipsoids // *Brit. Journ. Appl. Phys.* 1962. V.13, №12. P. 611-620.
89. *Hasselmann K.* On the nonlinear energy transfer in gravity-wave spectrum. General theory. // *J. Fluid Mech.*, 1962 V. 12, P. 481-500.
90. *Hasselmann K.* Weak-interaction theory of ocean waves // In: *Basic developments in fluid dynamics*. V.2. New York: Academic Press, 1968, p. 117-182.
91. *Havelock T.H.* The propagation of groups of waves in dispersive media, with application to waves on water produced by a travelling disturbance. *Proc. Roy. Soc. Lond. (A)*. 1908. P. 398-430.
92. *Helmholtz H.* Theorie der Luftschwingungen in Rohren mit offenen Enden, Crelle, LVII, 14.1859.
93. *Hogner E. A.* contribution to the theory of ship-waves // *Ark . Math. Astr. Fys.* 17. V.12. 1922. P. 1-50.
94. *Jeffreys H.* On water waves near the shore. *Phil. Mag.* 1924. 48. P. 44.
95. *Kawasaki K.* Numerical simulation of breaking and post-breaking wave deformation process around a submerged breakwater // *Coastal Engineering Journal*. 1999. V.41. №3,4. P. 201-223.
96. *Kelvin (W. Thomson).* Deep sea Ship-waves. // *Mathematical and Physical Papers*. 1910. V. 4. Cambridge, P. 394-418.
97. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change form of long waves advancing in a rectangular channel and on new type of long stationary waves // *Phyl.Mag.* 1895. 5. P. 422-443.
98. *Lagrange J.L.* Memoire sur le theorie du mouvements des fluides. 1781. *Nouv. Mem. Acad. R. Sci. Bellelett.* (Reprinted in «Oeuvres», Vol. IV. P. 695-750. Gauthier-Villars. Paris. 1869).
99. *Laplace P.S.* Recherches sur plusieurs point du systeme du monde. 1778. *Mem. Acad. R. Sci. Paris.* P.75-182. («Oeuvres» Vol. 9. P. 71-183. Gauthier-Villars, Paris. 1893).
100. *Lax P.* Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves // *Com. Pure and Appl. Math.*, 1968, v. 21, P. 467-490.
101. *Levi-Civita T.* Determinazione rigrosa della onde irrotazionale periodiche in acqua profonda. *Atti. Accad. Lincei.* 1924. 33. 5. P. 141-144.
102. *Lighthill M. J.* Some special cases treated by the Whitham theory // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1967, V. 299, P. 28. [Лайтхилл М. Дж. Некоторые частные случаи применения теории Уизема /

- В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М.: Мир, 1970, С. 43-76.]
103. *Lighthill M.J.* River waves. Naval hydrodynamics publication. 515 National Academy of Sciences. National Research Council. 1957.
 104. *Longuet-Higgins M.S.* Crest instabilities of gravity waves // J. Fluid Mech., 1993.
 105. *Longuet-Higgins M.S.* The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. II. Subharmonics. Proc. R. Soc. London Ser. A, 1978, v. 360, p. 489-505.
 106. *Longuet-Higgins M.S., Smith N.D.* An experiment on third order resonant wave interactions // J. Fluid Mech. 25. 1966. P. 417-436.
 107. *Lowan A., Morse P., Feshbach H., Lax M.* Scattering and radiation from circular cylinder and spheres, mathematical tables. Washington, US Navy Department, 1946.
 108. *Michell J.H.* The highest waves in water. Phil. Mag. 1893. V. 36. 5. P. 430-437.
 109. *Newton J.S.* Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Londini, Anno MDCLXXXVII. Julii 1686.
 110. *Peine H.* Influence of sound-structure interaction on backscattering amplitude in underwater acoustics // Journ. Acoust. Soc. Amer. 1999. V.105, №2. P. 1108-1115.
 111. *Peregrine D.H.* Long waves on a beach // J. Fluid Mech. 1967. V.27. part IV. P. 815-827
 112. *Peregrine D.H.* Interaction of water waves and currents // Adv. Appl. Mech. 1976. V. 16. P. 9-117.
 113. *Peregrine D.H., Banner M.L.* Wave breaking in deep water // Ann. Rev. Fluid Mech., 1993. V.25. P. 373-397.
 114. *Petters A.S.* A new treatment of the ship-wave problem // Comm. Pure. Appl. Math. 2. V.2-3. 1949. P. 123-148.
 115. *Philips O.M.* The Dynamics of the Upper Ocean. — Cambridge: Univ. Press, 1966.
 116. *Poisson S. D.* Memoire sur la Theorie des Ondes. Mem. de l'Acad. Roy. des Sciences. 1816.
 117. *Rankine W.J.* On the Exact Form of Waves near the Surface of Deep Water, Phil. Trans. 1863. P. 481.
 118. *Rayleigh (J.W. Strutt).* On waves. Phill. Mag. 1876. 5. 1. P. 257-279.
 119. *Riemann B.* Uber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Gottingen Abhandlungen. Bd. VIII, S. 43, Werke, 2te Aufl., Leipzig, 1892, S.157.
 120. *Roseau M.* Contribution a la theorie des ondes liquids de gravite en profondeur variable. Publ. Sci. Tech. Du Ministere de l'Air. 1952. Paris. 275. t. 90.
 121. *Russell J. Scott.* Report on waves. Br. Assoc. Adv. Sci. Rep, 1844, 14th Mtg, p. 311-390, plates XLVII-LVII.

122. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Trans. Camb. Phil. Soc.* 8. 1847. P. 441.
123. *Struik D.J.* Sur les ondes irrotationnelles dans les canaux. *Atti. Accad. Lincei.* 1925. 16. 1. P. 522-527.
124. *Ursell F.* On Kelvin's ship-wave pattern // *J. Fluid Mech.* 8. V.3. 1960. P. 418-431.
125. *Ursell F.* On the rigorous foundations of short-wave asymptotics. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1966. 62. 2. P. 227-244.
126. *Whitham G.B.* A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. *J. Fluid Mech.*, 1965, v. 22, p. 273-283.
127. *Whitham G.B.* Nonlinear dispersion of water waves // *J. Fluid Mech.*, 1967, V. 27, P. 399-412.
128. *Yuen H.C., Lake B.M.* Nonlinear deep water waves: Theory and experiment. *Phys Fluids*, 1975, V. 18, p. 956-960.
129. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* 1965, V.15, P. 240-243.
130. *Zaharov V.* Weakly non-linear waves on the surface of an ideal finite depth fluid // *Amer. Math. Soc. Trans.* 1998. V. 182. P. 167-197.

*Работы по моделированию поверхностных волн, линейный случай
(глава 2)*

1. *Аббасов И.Б.* Трехмерное моделирование волновых процессов на поверхности мелководья // *Известия ТРТУ. Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием «Экология 2000 — море и человек».* Таганрог. 2000. С. 59.
2. *Аббасов И.Б.* Моделирование рефракции поверхностных гравитационных волн на мелководье. Материалы I Всероссийской научно-практической конференции «Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях» (ИАМП-2000). Алтайский гос. техн. унив. Бийск. 2000. С. 144-145.
3. *Аббасов И.Б.* Моделирование рефракции поверхностных гравитационных волн в условиях залива. Сборник научных докладов и тезисов II Межд. конф. стран СНГ «Молодые ученые – науке, технологиям и профессиональному образованию для устойчивого развития: проблемы и новые решения». Ч.1. Академия менеджмента инноваций. Москва. 2000. С.8.
4. *Аббасов И.Б.* Исследование гидродинамических волн в прибрежных акваториях. Депонирована в ВИНТИ РАН. №3223-В00. М.; 2000. 31 с.
5. *Abbasov I.B.* Modelling of refraction of the surface gravitation waves in the condition of a Gulf. Fifth International Conference on Coastal Engineering. 2001. Wessex Institute of Technology, Rhodes, Greece.

6. Аббасов И.Б. Пространственное моделирование волновых явлений на поверхности залива // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественная серия. 2001. №4. С. 56-57.
7. Аббасов И.Б. Моделирование колебаний на водной глади // Известия ТРТУ. №1. 2002. С. 265.

Работы по моделированию поверхностных волн, нелинейный случай (глава 3)

1. Аббасов И.Б. Моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях залива. Тезисы докладов молодых ученых Кабардино-Балкарского научного центра РАН. Нальчик. 2001. С.38-39.
2. Аббасов И.Б. Моделирование нелинейных поверхностных волн на мелководье. Труды IV Международной научно-технической конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов». Ульяновск. УлГУ. 2001. С. 4-5.
3. Аббасов И.Б. Исследование и пространственное моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественная серия. 2003. №1. С.33-36.
4. Аббасов И.Б. Исследование и моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т.39. №4. С. 568-573. [Abbasov I.B. Study and simulation of nonlinear surface gravity waves under shallow-water conditions // Izvestiya, Atmospheric and oceanic Physics. V.39, №4, 2003, P.506-511].
5. Аббасов И.Б. Пространственное моделирование рефракции нелинейных поверхностных волн // Успехи современного естествознания. №11. Изд-во Академии Естествознания. М, 2003. С.95-96.
6. Аббасов И.Б. Исследование и моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн в заливе // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2004, №3, Т.40. С.423-426.
7. Abbasov I.B. Investigation and modeling of the refraction of nonlinear surface waves in a gulf // Izvestiya, Atmospheric and oceanic Physics. V.40, №3, 2004, P. 377-380.
8. Аббасов И.Б. Математическая модель рефракции нелинейных поверхностных волн в условиях залива. Тезисы докладов всероссийской конференции «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение». Институт гидродинамики. Новосибирск, 2004. С.11-12.
9. Abbasov I.B. Simulation of the spatial refraction of the non-linear surface gravitational waves. VI International Congress on Mathematical Modeling. Book of abstracts. Nizhny Novgorod, University of Nizhny Novgorod. 2004. P. 143.

10. Аббасов И.Б. Моделирование пространственной рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководья. Сборник трудов XII Всероссийского школы-семинара «Современные проблемы математического моделирования». 2007. Абрау-Дюрсо. ЮГИНФО ЮФУ. С. 1-6.
11. Аббасов И.Б. Нелинейные поверхностные гравитационные волны в условиях мелководья. IV Всероссийская школа-конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова. 2008. Абрау-Дюрсо. ЮГИНФО ЮФУ.
12. Аббасов И.Б. Моделирование распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье с учетом дисперсии // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. №8. С.114-118.
13. Аббасов И.Б. Моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелкой воде с учетом дисперсии. Сборник трудов XIII Всероссийской конференции-школы «Современные проблемы математического моделирования». Ростов н/Д. Изд-во ЮФУ. 2009. С. 10-17.
14. Аббасов И.Б. Исследование нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье с учетом дисперсии // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественная серия. 2009. №6. С. 67-71.
15. Аббасов И.Б. Моделирование нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелкой воде с учетом дисперсии // Доклады академии наук. 2009. Т. 429, №6. С. 825-827.



Рис. 2.6.1. Волновая структура на поверхности воды, образованная суперпозицией поверхностных волн малой амплитуды (пос. Дюрсо, Черное море)



Рис. 2.6.2. Периодические волновые ячейки, образованные наложением поверхностных волн различной длины, мелкая рябь на зыби (пос. Дюрсо)

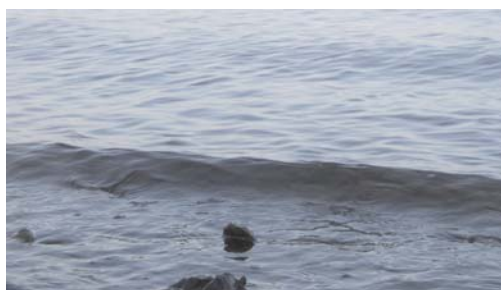


Рис. 2.6.3. Затухание на берегу поверхностной волны малой амплитуды (Таганрогский залив, Азовское море)



Рис. 2.6.4. Рефракция поверхностных волн в условиях бухты (*пос. Дюрсо*)



Рис. 2.6.5. Разгон ветровых волн вдоль береговой линии, косой прибой (*пос. Дюрсо*)



Рис. 2.7.1. Клинообразные волновые следы от плавающих уток в пруду Александровского сада (г. Санкт-Петербурге)



Рис. 2.7.5. Расходящиеся волны от пловца. Скорость пловца меньше скорости расходящихся волн (Таганрогский залив)



Рис. 3.4.8. Укручение переднего фронта гребня волны и образование ныряющего буруна (выброс струи из гребня с захватом воздуха) (пос. Дюрсо)



Рис. 3.4.9. Обрушение гребня волны зыби на берегу (пос. Дюрсо)